Escuelas En Foco

Estudiar y aprender en séptimo
Geometría
Notas para docentes

Introducción

Diferentes investigaciones sobre la enseñanza de la geometría (Duval et al., 2004; Laborde y Capponi, 1994; Perrin-Glorian y Godin, 2014; Sadovsky et al.,1998) han estudiado el valor formativo que tiene el trabajo en el aula a partir de la construcción de figuras. Este tipo de tarea, bajo ciertas condiciones, favorece el estudio de las propiedades del objeto en cuestión ya que en el intento por atrapar en una representación las propiedades que caracterizan la figura, las o los estudiantes ponen en relación el dibujo con dicho referente teórico.

Acordamos con las investigadoras mencionadas y los investigadores mencionados en que este tipo de trabajo favorece el pasaje desde una posición perceptiva a una posición productiva en términos del análisis o el establecimiento de las relaciones que caracterizan a estos objetos geométricos.

En el segundo ciclo de la escuela primaria se tiene la intención que las y los estudiantes construyan mediante los instrumentos de geometría, la representación de un objeto geométrico teniendo en cuenta las relaciones que lo caracterizan. Esas relaciones suelen quedar en el terreno de lo implícito con lo cual es necesario que la o el docente habilite un espacio de discusión cuyo objetivo sea explicitar cuáles fueron las propiedades puestas en juego en cada construcción.

Con respecto a los instrumentos de geometría, se propone que la precisión y la destreza en su uso no sea un objeto de estudio en sí mismo sino que estén al servicio de la resolución de problemas y de las conceptualizaciones geométricas.

En relación a las argumentaciones, una tarea de construcción también puede motorizar un trabajo deductivo en el que es necesario identificar el modo de plasmar dichas relaciones en la construcción e identificar cuáles de los instrumentos de geometría permiten llevarla a cabo. Asimismo, se espera que la o el estudiante valide por qué el dibujo realizado representa ese objeto. Desde el punto de vista del docente, esta última instancia plantea el problema didáctico de cómo negociar la necesidad de validar este texto con sus estudiantes.

En definitiva se propone un trabajo dialéctico entre una geometría con el foco puesto en la observación, en la manipulación de los instrumentos de geometría y en validaciones empíricas apoyadas en lo que se ve y en lo que se dibuja y una geometría más deductiva, donde lo central es el estudio de las figuras y sus propiedades (Murúa et al, 2023).

Con respecto al trabajo en el aula, acordamos con Quaranta y Wolman (2003) en que una o un estudiante no aprende matemática si no resuelve problemas, pero esta es una condición necesaria, no suficiente: tampoco aprende matemática si sólo resuelve problemas. Es decir, proponemos una enseñanza de la matemática basada en que las niñas y los niños resuelvan problemas —puede ser en un primer momento de manera individual y luego en pequeños grupos—pero luego creemos que es indispensable que haya momentos de discusiones colectivas. En estos espacios —usualmente denominado como *puestas en común*—esperamos que, además de poner en común las resoluciones de las y los estudiantes, la o el docente proponga relacionar las estrategias desplegadas, abra nuevas preguntas y nuevos asuntos de discusión, descontextualice los conocimientos abordados y los formalice. Quaranta y Wolman mencionan que estos espacios no son "eventos naturales" de la vida en el aula sino que las y los docentes son las encargadas y los encargados de planificar y gestionar dichos espacios.

Circunferencia, construcción de triángulos y explicaciones mediante propiedades. Análisis de los problemas 1,2 y 3 (páginas 40 y 41)

Los dos primeros problemas tienen la intención de recuperar la noción de circunferencia como lugar geométrico y los “elementos” que la definen: el centro y el radio.

Luego se propone retomar el trabajo realizado en sexto grado sobre la construcción de triángulos a partir de la circunferencia y la argumentación a través de propiedades geométricas.

1. La circunferencia de centro A tiene radio de 3 cm y la circunferencia de centro B tiene radio de 1 cm.

a. Sin medir, marcá un punto que esté a 3 cm de A. ¿Es posible marcar más de un punto que cumpla estas condiciones?

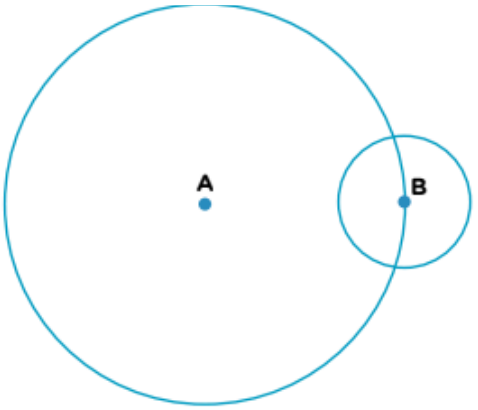
.....

b. ¿Hay algún punto que esté a 3 cm de A y a 1 cm de B a la vez? ¿Cuántos hay?

.....

c. ¿Es posible saber, sin medir, a qué distancia está el punto B del punto A?

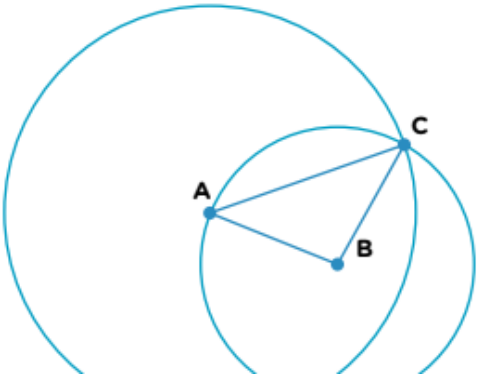
.....



El objetivo del ítem a) es recuperar la noción de circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto dado (en este caso A). Este problema está planteado en el libro *Estudiar y Aprender en sexto grado* (página 63) y su análisis lo encuentran en el documento *Estudiar y aprender en 6to con orientaciones* (página 2).

El avance en relación al problema mencionado está en encontrar puntos que cumplan dos condiciones: estar simultáneamente a 3 cm de A y a 1 cm de B. Puede ocurrir que haya alguna o algún estudiante que marque puntos que cumplen solamente alguna de las condiciones pedidas. En este caso la docente o el docente puede, en la discusión colectiva, aprovechar la diversidad de producciones para discutir cuántos puntos hay que están a 3 cm de A y a 1 cm de B.

2. En la siguiente figura, la circunferencia de centro A tiene radio de 3 cm y la circunferencia de centro B tiene radio de 2 cm. Averiguá, sin medir, la longitud de los lados del triángulo ABC.

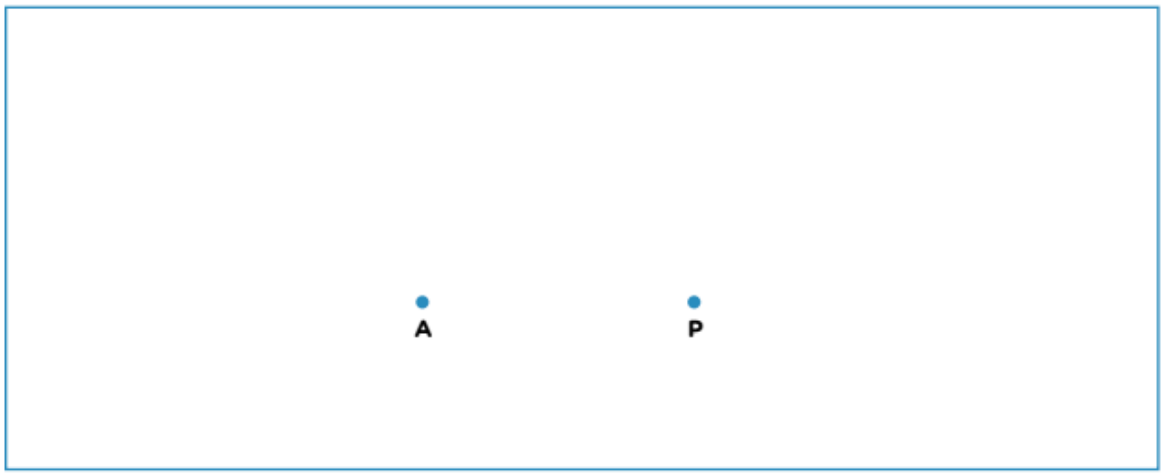


Nuevamente aquí se pretende trabajar sobre las condiciones geométricas que posee cada punto. Por ejemplo, A pertenece a la circunferencia de centro B y radio AB, por lo tanto la longitud del segmento AB es de 2 cm.

Si algún estudiante decide medir con regla graduada, el o la docente puede habilitar esta estrategia para luego en la discusión colectiva debatir las diferencias entre los dos tipos de explicaciones. En este caso, cuando se mide y se obtiene un valor numérico, no se está explicando por qué ese lado mide dicho valor. En cambio, cuando se argumenta mediante propiedades geométricas –en este caso apelando a la noción de radio– se produce una explicación de por qué la longitud pedida es esa y no puede ser otra.

En otras palabras, **no se propone priorizar las explicaciones argumentativas por sobre las empíricas porque al utilizar los instrumentos de geometría se pueden producir errores de medición. Se propone destacar las explicaciones argumentativas porque explican —dan cuenta— del porqué se cumple determinada propiedad**.

3. Los puntos A y P están a 4 cm de distancia. ¿Dónde hay que ubicar el punto H para que se pueda construir un triángulo AHP que tenga un lado AH de 5 cm y un lado HP de 3 cm?



Al no haber restricciones sobre los instrumentos a utilizar, es de esperar que las niñas y los niños realicen la construcción con regla graduada ajustando los lados AH y HP hasta que midan 5 cm y 3 cm respectivamente. Si ningún grupo recurre al uso del compás, la o el docente puede preguntar: *¿cuántos puntos hay que cumplen lo*

pedido?¿Si *la condición fuese una sola, por ejemplo, encontrar todos los puntos que están a 5 unidades de A, ¿qué otro instrumento te permite hallar todos esos puntos?* Con esta pregunta se espera recuperar la idea de circunferencia como lugar geométrico[1].

Aunque el problema no lo solicite, en la discusión colectiva se puede abrir un debate sobre cuántos triángulos se pueden construir. La conclusión de que el triángulo es único (aunque las circunferencias se intersectan dos veces) puede abordarse más adelante luego del trabajo con la actividad 4.

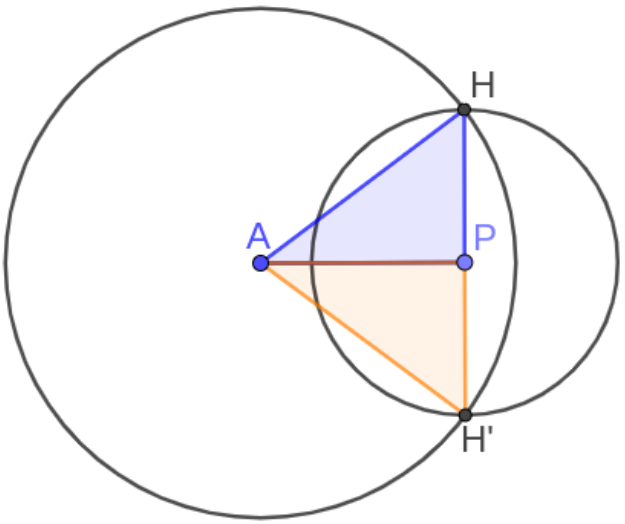


Imagen 1: Construcción de los triángulos recurriendo a la noción de circunferencia

Es decir, puede quedar como conclusión **provisoria** que hay dos triángulos que cumplen lo pedido porque hay dos puntos que pertenecen a ambas circunferencias o puede aceptarse explicaciones visuales como por ejemplo, que el triángulo AHP (ver imagen 1) es un espejo del AH'P. Más adelante se espera apelar a la propiedad de que si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes.

Como hemos mencionado en la introducción de este documento, resulta interesante que en la discusión colectiva la o el docente abra interrogantes que no están

[1] Recordamos que esta propuesta de trabajo se encuentra en el documento *Estudiar y aprender en 6to con orientaciones*.

planteados en el enunciado. Por ejemplo, *¿qué ocurre si la distancia entre A y P es de 6 cm? ¿Y si es de 9 cm?* Si las niñas y los niños exploran con más valores pueden llegar a concluir que si la distancia entre A y P es 8, las circunferencias se cortan una sola vez en el segmento AP y si es mayor a 8, no se intersecan. Por lo tanto, en estos casos no es posible construir el triángulo AHP.

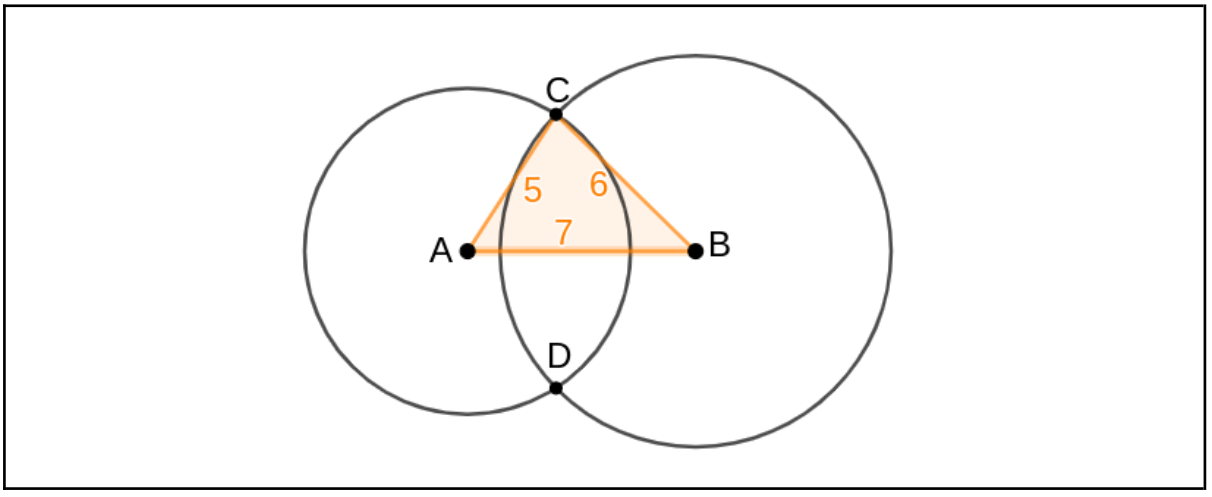
Si las niñas y los niños recuerdan la propiedad triangular[2], la misma puede quedar escrita en un portador en el aula para las futuras clases. Caso contrario, dicha propiedad se va a recuperar en futuras actividades.

Dados ciertos datos, ¿cuántos triángulos se pueden construir? Análisis de los problemas 4,5 y 6 (página 41)

En este bloque de problemas se pretende estudiar cuántos triángulos se pueden construir dados dos lados, tres lados y dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

4. Usando compás y regla, construí en tu carpeta un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 7 cm y 6 cm. ¿Es posible construir más de un triángulo con esos datos?

En esta actividad es probable que los y las estudiantes utilicen la regla y vayan ajustando los lados hasta que el triángulo “cierre”. Teniendo en cuenta el trabajo realizado en la actividad anterior, también es posible que algún grupo recurra al uso del compás para construir el triángulo. Es decir, pueden comenzar trazando un segmento de 7 cm y luego una circunferencia en cada extremo del radio correspondiente, tal como se muestra en la imagen 2.



[2] Formalmente, esta propiedad se denomina “desigualdad triangular”.

Imagen 2: Construcción del triángulo ABC recurriendo al compás.

Dependiendo de cada recorrido, es muy común que los niños y las niñas no tracen la circunferencia entera, sino que hagan “arquitos”. En este último tramo de la escuela primaria se pretende que realicen la circunferencia completa para identificar la cantidad total de intersecciones entre las circunferencias. En este caso se puede ver que otro triángulo posible (congruente) es el ADB.

En cuanto a la cantidad de soluciones, se puede aprovechar la diversidad en el aula (porque quizás otros estudiantes comiencen por el lado de 6 cm o por el de 5 cm) para llegar a la conclusión de que independientemente de por qué lado se comience o qué punto de intersección se tome, todos los triángulos resultan congruentes.

Como los criterios de congruencia es un contenido que se aborda en la escuela secundaria, la validación de la conclusión mencionada puede realizarse superponiendo todos los triángulos construidos.

5. Un triángulo ABC tiene un lado AB de 5 cm y un lado AC de 7 cm. ¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse que cumplan esta condición? Escribí en tu carpeta la respuesta.

Lo interesante de esta actividad es que admite varias soluciones, es decir, se pueden construir varios triángulos dados dos lados. Veamos algunas estrategias posibles.

Teniendo en cuenta lo realizado en la actividad 4, es posible que algún niño o alguna niña comience trazando un lado de 7 cm, luego una circunferencia de centro en un extremo y radio 5 y finalmente trace una circunferencia con centro en el otro extremo y un radio conveniente. En este caso, la maestra o el maestro puede preguntar: *teniendo en cuenta la segunda circunferencia, ¿qué valores puede tomar su radio?* Ante esta pregunta, teniendo en cuenta valores naturales, una posible respuesta puede ser 3 cm, 4 cm, 5 cm y 7 cm.

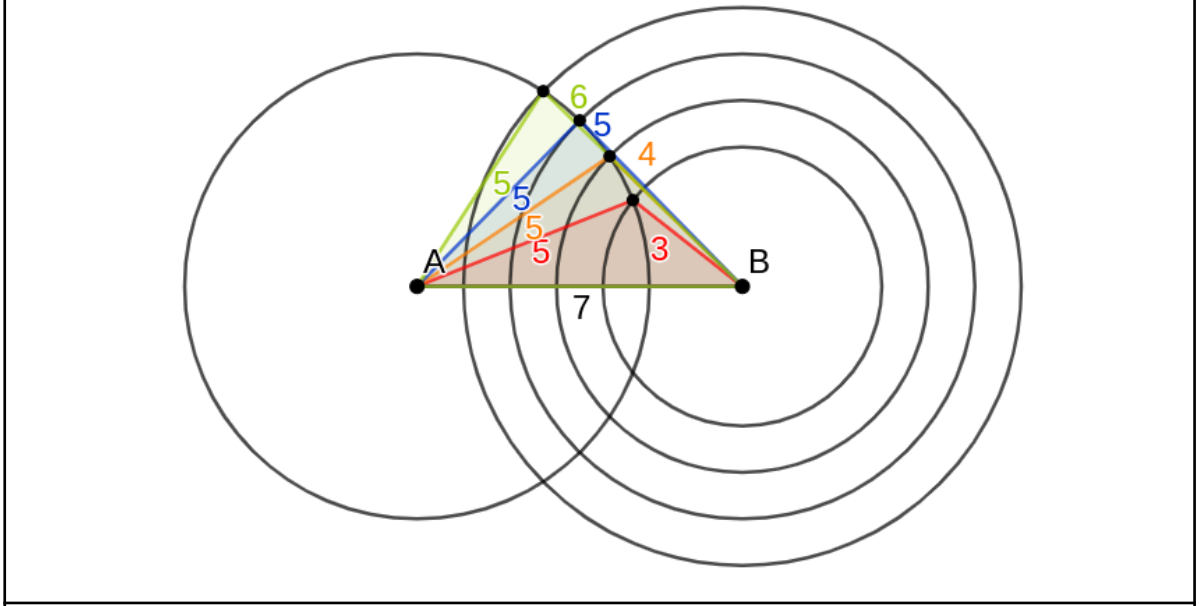


Imagen 3: Trazado de algunos triángulos teniendo en cuenta solamente valores naturales para las circunferencias de centro B.

Nuevamente, se puede aprovechar la diversidad de construcciones para estudiar que el valor del tercer lado puede ser mayor a 7 y también admitir valores no naturales.

Otra posible estrategia que puede realizar algún grupo es marcar varios puntos en la circunferencia de radio 5 cm y luego unirlos con el vértice B, tal como se muestra en la imagen 4.

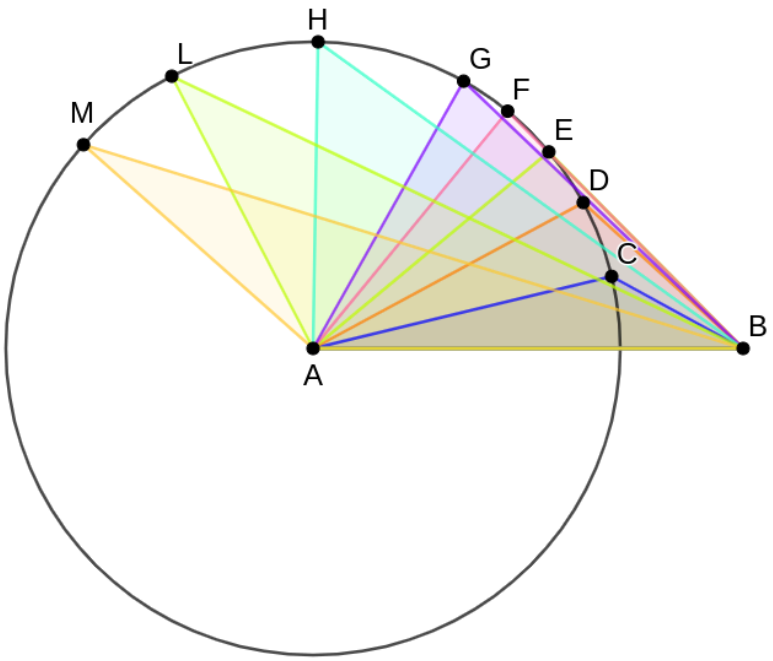


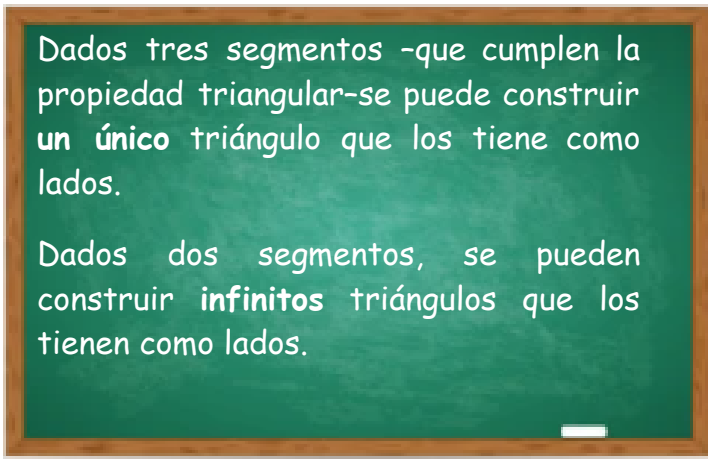
Imagen 4: Posible estrategia marcando varios puntos en la circunferencia de radio 5.

En la discusión colectiva, esta estrategia se puede comparar con la anterior para argumentar que el tercer lado puede medir más de 7 cm. Una posible intervención docente puede ser: *¿qué valores puede tomar el tercer lado?* Por otro lado, se puede preguntar, *¿en tercer vértice, puede estar en cualquier lugar de la circunferencia?*

Luego de discutir sobre los posibles valores que puede tomar el tercer lado, la o el docente puede intervenir abriendo el debate sobre *cuántos triángulos se pueden construir dados un lado de 7 cm y otro de 5 cm.* Una respuesta frecuente de las niñas y los niños es que hay 180 triángulos posibles teniendo en cuenta el ángulo formado por A, B y el tercer vértice. En este caso se puede retomar la discusión planteada en la actividad 1 sobre la cantidad de puntos que están a igual distancia de uno dado.

Como cierre de estos dos problemas se puede escribir en un afiche las siguientes conclusiones[3]:

[3] Las conclusiones que se presentan en este documento son orientativas. Se espera que en cada aula el texto dependa de lo que se vaya construyendo colectivamente junto a las y los estudiantes.



6. Un triángulo ABC tiene un lado AB de 5 cm y un lado AC de 7 cm que forman un ángulo de 40°. ¿Cuántos triángulos distintos pueden construirse que cumplan esta condición? Escribí en tu carpeta la respuesta.

La intención de este problema es discutir cuántos triángulos se pueden construir dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Es posible llegar a la conclusión de que el triángulo es único retomando el problema anterior, donde dicho ángulo era variable.

Más adelante, se retoma esta conclusión de manera general.

Nuevas construcciones de triángulos a partir de ciertas condiciones sobre sus lados. Análisis de los problemas 1,2,3,4,5 (página 42)

El objetivo de este bloque de problemas es que las y los estudiantes construyan triángulos dadas ciertas condiciones sobre sus lados. En algunas ocasiones se pide la construcción de triángulos equiláteros e isósceles y en otras se dan como dato los valores de algunos lados.

1. Este es uno de los lados de un triángulo equilátero.
a. Construí el triángulo.
b. ¿Es posible construir más de un triángulo distinto con estos datos?

Teniendo en cuenta el trabajo realizado hasta aquí, esperamos que las niñas y los niños construyan el triángulo equilátero con regla no graduada y compás. En el caso de que un grupo utilice la regla graduada y ajuste los lados para que el triángulo "cierre", el o la docente puede preguntar si la construcción puede realizarse sin recurrir a la medida.

Con respecto a la unicidad del triángulo, en la discusión colectiva se puede validar empíricamente mediante la superposición o recurriendo a la propiedad propuesta en la actividad 5 del bloque anterior, es decir: dados tres segmentos –que cumplen la propiedad triangular–se puede construir un único triángulo que los tiene como lados. Como en este caso se trata de un triángulo equilátero, al conocer un lado, se deduce que los otros dos son iguales.

2. Construí un triángulo isósceles que tenga lados de 4 cm y 6 cm.
a. ¿Es posible construir más de un triángulo distinto con estos datos?

3. Construí un triángulo isósceles que tenga lados de 2 cm y 6 cm.
a. ¿Es posible construir más de un triángulo distinto con estos datos?

Con respecto a las construcciones de los problemas 2 y 3, al no contar con los segmentos, en esta ocasión las niñas y los niños deberán usar la regla graduada, aunque se espera que usen el compás para trazar las circunferencias que involucran dos de sus lados, tal como se muestra en la imagen 5.

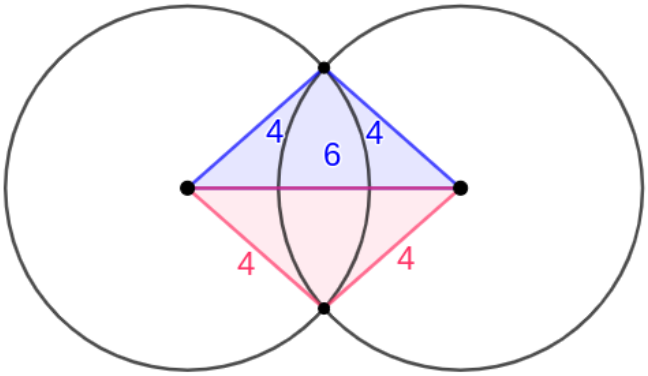


Imagen 5: Construcción trazando un segmento de 6 cm y luego dos circunferencias de radio 4 con centro en cada extremo de dicho segmento.

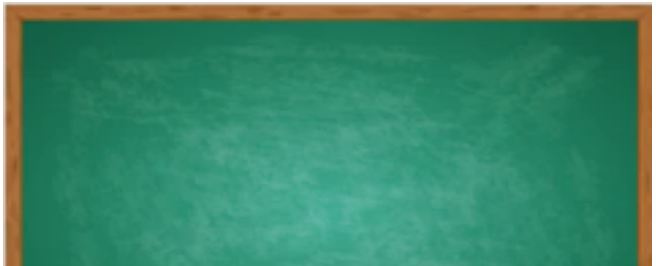
En la discusión colectiva se propone abrir un debate sobre cuántos triángulos isósceles se pueden construir. Es interesante notar que en el problema 2 hay dos triángulos isósceles posibles de construir (el que tiene lados 4 cm, 4 cm y 6 cm y el que tiene lados 4 cm, 6 cm y 6 cm) mientras que en el problema 3 se presenta un caso que no cumple con la propiedad triangular.

4. Uno de los lados de un triángulo mide 5 cm y otro lado, 3 cm. ¿Es posible que el tercer lado mida 1 cm? ¿Y 4 cm?

.....

5. Un triángulo tiene un lado de 7 cm y otro de 4 cm. Decidí con un/a compañero/a cuánto tiene que medir el tercer lado como mínimo para que exista el triángulo. Explicá por qué y construí el triángulo.

El objetivo de los problemas 4 y 5 es retomar la propiedad *triangular*. Luego de este trabajo se puede dejar escrita dicha propiedad, es decir:



Nuevas construcciones de triángulos a partir de ciertas condiciones sobre sus lados y ángulos. Análisis de los problemas 6,7,8 y 9 (página 43)

6. Construí un triángulo que tenga un lado de 4 cm y en el que los ángulos que se forman con ese lado sean de 70° y 40°. ¿Es posible construir más de un triángulo distinto con esos datos? Si la respuesta es no, explicá por qué y, si es sí, construí dos triángulos distintos.

Hasta aquí se construyó la propiedad de que dados tres segmentos, se puede construir un único triángulo que los tiene como lados y que si los datos son los lados y el ángulo comprendido, también el triángulo es único. En esta oportunidad se propone analizar qué ocurre si los datos son un lado y los ángulos que “se forman” con ese lado.

Con respecto al motivo de por qué el triángulo es único, es esperable que las niñas y los niños respondan que “los lados de los ángulos se encuentran en el tercer vértice” o “los ángulos cierran el triángulo de una sola manera”.

En la discusión colectiva se puede proponer otra construcción con otros valores y luego preguntar: *si nos dan como dato un lado y dos ángulos que se forman con ese lado, ¿hay manera de que se pueda construir más de un triángulo?*

7. Construí un triángulo escaleno que tenga un lado de 5 cm y otro de 7 cm que formen un ángulo agudo. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?

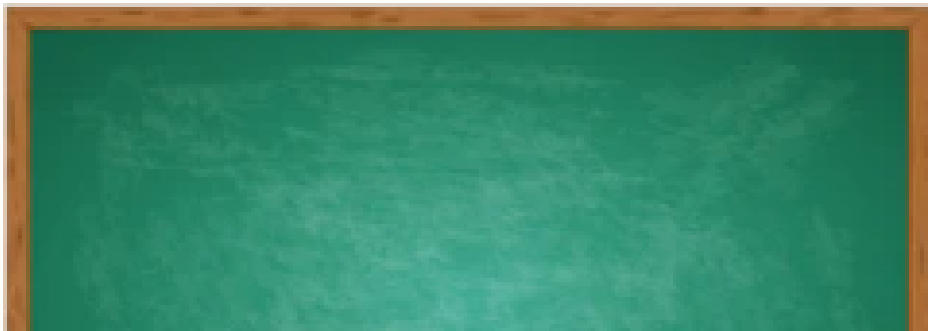
8. Construí un triángulo escaleno que tenga un lado de 3 cm y otro de 5 cm que formen un ángulo recto. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?

Anteriormente se concluyó que dados dos segmentos, se pueden construir infinitos triángulos que los tengan como lados. La intención de los problemas 7 y 8 es volver sobre esa construcción para retomar la conclusión que si el ángulo está determinado, el triángulo es único.

Para arribar a esta conclusión, en la discusión colectiva del problema 7 se puede preguntar: *¿qué condición le podemos agregar al problema para que el triángulo sea único?* O una posible intervención docente para el problema 8 puede ser: *si el ángulo fuese de 120º, ¿también el triángulo sería único?*

Asimismo, también se pueden brindar otros valores de lados y ángulos para determinar que las conclusiones no dependen de esos casos particulares.

Como cierre de este bloque de actividades, se pueden agregar al afiche anterior, estas nuevas conclusiones. Es decir:



9. Investiguen entre todos/as, y escriban sus conclusiones en la carpeta, si es posible construir un triángulo rectángulo que además sea:
a. Isósceles
b. Escaleno
c. Equilátero

Lo interesante de este problema es que las y los estudiantes tienen que explorar distintas condiciones para construir un triángulo rectángulo. En los casos en los cuales es posible, teniendo en cuenta las distintas construcciones, en la discusión colectiva se puede preguntar cuántos triángulos rectángulos se pueden construir. Otra intervención que consideramos interesante en relación al ítem a) es preguntar *¿qué datos se tienen que agregar para que el triángulo rectángulo isósceles sea único?* Por ejemplo, conociendo la medida de uno de los catetos, se puede construir un único triángulo rectángulo isósceles, tal como se muestra en la imagen 6.

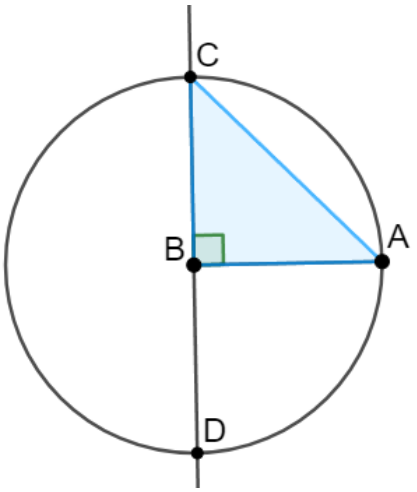


Imagen 6: Construcción de un triángulo isósceles rectángulo conociendo la longitud del cateto AB. El triángulo ABD resulta congruente al ABC.

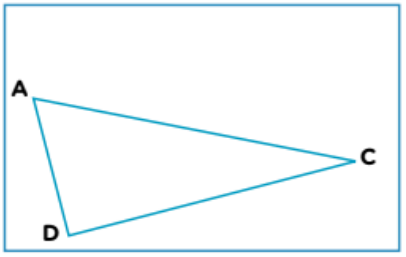
Con respecto al ítem c), ante la imposibilidad de construir un triángulo rectángulo equilátero, el o la docente puede invitar que se realice alguna explicación que trascienda lo empírico. Por ejemplo, determinando el valor de los ángulos de **cualquier** triángulo equilátero.

Situaciones que involucran relaciones entre triángulos y paralelogramos. Análisis de los problemas 1, 2, 3 y 4 (página 76)

Los siguientes problemas ponen en juego ciertas relaciones entre triángulos y paralelogramos con la intención de promover la caracterización de ciertos cuadriláteros y el análisis de algunos de sus elementos y propiedades. En particular, el trabajo con estas situaciones involucra, por un lado, realizar construcciones que implican "completar" una figura a partir de reconocer y explorar ciertas características de los triángulos que se ofrecen. Por otro lado, se propone establecer cuáles son las propiedades que definen a la figura en cuestión. Este estudio de los paralelogramos abona al trabajo posterior sobre el paralelismo y la perpendicularidad.

Relaciones entre triángulos y paralelogramos

1. Este triángulo es la mitad de un rectángulo en el que el segmento AC es una de sus diagonales. Construí el rectángulo usando los instrumentos que necesites.



PARA AYUDAR A RESOLVER

Para resolver los **problemas 1** a **3** puede ayudarte hacer un esquema de las figuras completas que tenés que construir y marcar allí los lados y diagonales que se ofrecen como datos.

En el problema 1 se requiere interpretar que para completar el rectángulo es necesario construir un triángulo congruente a ADC, es decir, replicar el triángulo utilizando el segmento AC como lado común. La elección del segmento AC es fundamental ya que es una diagonal de la figura a construir.

Una posible estrategia que podrían desplegar las niñas y los niños es utilizar la regla a “ojo” sin tener control de que efectivamente se esté “replicando” el triángulo dado. En este caso será necesario la intervención docente que permita poner en discusión la perpendicularidad y el paralelismo.

Dependiendo del recorrido de cada grupo, quizás sea conveniente preguntar a toda la *clase cómo se trazan rectas paralelas y perpendiculares con regla y escuadra* y analizar las distintas estrategias que surjan.

Posiblemente las niñas y los niños se apoyen en la estrategia de desplazar el ángulo recto de la escuadra a los vértices A y C para garantizar la condición de perpendicularidad de los lados; de esta manera, la escuadra les permitirá asegurar los ángulos rectos y el trazado de segmentos. A partir de este procedimiento se puede discutir en el espacio colectivo las razones que motorizan el uso de la escuadra. Esto dará lugar a promover un trabajo argumentativo sobre la condición de perpendicularidad y paralelismo para su construcción. Algunas preguntas que se podrían realizar para propiciar dicha discusión pueden ser: *¿Qué tuvieron en cuenta para completar el rectángulo? ¿Por qué usaron la escuadra? ¿Cómo pueden saber si lo que construyeron es un rectángulo?*

Otro asunto interesante para discutir es si es posible construir el rectángulo con triángulos con otras características, se podría preguntar *¿Si el triángulo no tuviera un ángulo recto es posible construir el rectángulo? ¿Cuáles tienen que ser las características del triángulo para que pueda construirse, a partir de él, un rectángulo?*

Las intervenciones anteriores, tienen la intención de que las niñas y niños caractericen la figura a partir de los conocimientos puestos en juego *"El rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos" entonces "si se tiene un ángulo recto es posible construir los otros tres para completar el rectángulo"*

Por otro lado, también puede ocurrir que algunas niñas y algunos niños recuperen el trabajo realizado con construcción de triángulos y busquen el vértice faltante trazando circunferencias, una de ellas con centro en A y radio DC, y la otra circunferencia con centro en C y radio AD. En este caso se puede preguntar: *¿Por qué con la intersección entre las circunferencias se obtiene el vértice faltante? ¿Por qué el ángulo ABC es recto si esta propiedad no se puso en juego al construir la figura?*

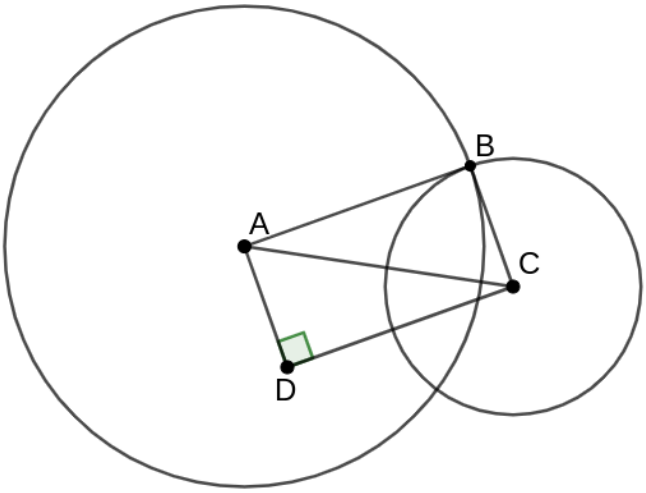


Imagen 7: Construcción de un rectángulo apelando a la igualdad de los lados opuestos.

En este caso se puede argumentar que por la construcción realizada $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{DC}$ (porque así fueron elegidos los radios de las circunferencias). Entonces los triángulos ACD y ABC tienen dos lados correspondientes iguales y comparten AC, por lo tanto –teniendo en cuenta la primera afirmación del "afiche" de la página 13–

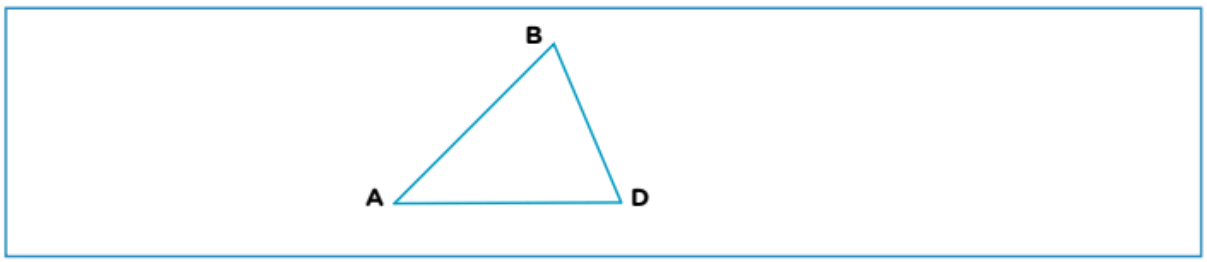
los triángulos son congruentes; con lo cual el ángulo ABC también es recto. Más adelante, cuando se aborde la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, se puede retomar esta estrategia para validar que los ángulos restantes también son rectos.

La propuesta realizada en el párrafo anterior nos parece central. Es decir, desde nuestro punto de vista, **un asunto fundamental del "quehacer geométrico" es que las niñas y los niños sean capaces de argumentar ciertas relaciones geométricas apoyándose en las propiedades abordadas anteriormente. Que las y los estudiantes sean capaces de lograr este tipo de razonamiento deductivo es uno de los grandes desafíos de la enseñanza**.

Algunas conclusiones que podrían quedar registradas son:

- Como la escuadra "porta" un ángulo recto es posible trazar segmentos perpendiculares a otro.
- Cada diagonal de un rectángulo divide a la figura en dos triángulos rectángulos.

2. Este triángulo es la mitad de un rombo en el que el segmento BD es una de sus diagonales. Construí el rombo usando los instrumentos que necesites.



La tarea a realizar en el problema 2 es similar a la de la actividad anterior. En este caso se tiene que completar el rombo a partir de un triángulo isósceles. Las niñas y niños podrían anticipar que obtienen un rombo si duplican el triángulo con el lado BD común.

Una posible estrategia es construir dos circunferencias, una con centro en D y la otra con centro en B, con radio igual a los segmentos congruentes, tal como se muestra en la imagen 8.

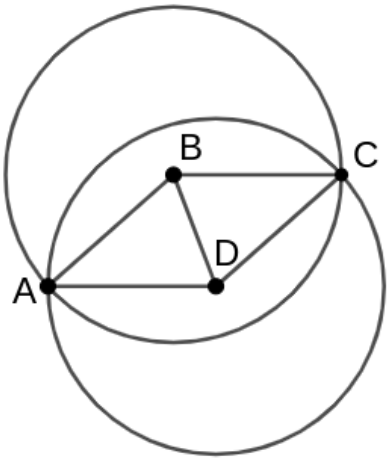


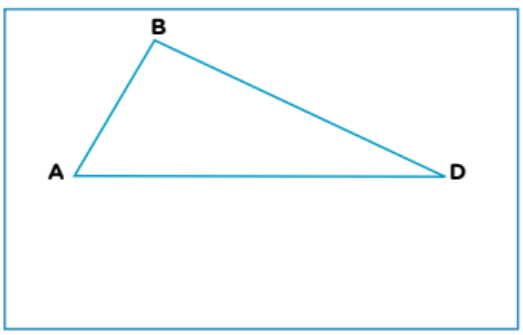
Imagen 8: Construcción del rombo apelando a la noción de circunferencia y su radio.

Ante esta estrategia, en la discusión colectiva, la o el docente puede preguntar: *¿por qué esa figura es un rombo? Es decir, ¿por qué los cuatro lados resultaron iguales?* Aunque es probable que las y los estudiantes midan los lados para responder las preguntas, la intención es que las respondan apelando a las relaciones geométricas puestas en juego. En este caso, retomando la noción de radio de una circunferencia.

Es propicio generar en el espacio colectivo la discusión de por qué el lado BD tiene que ser común, como así también la pertinencia del compás para replicar los lados faltantes del rombo.

Otra intervención para la discusión colectiva puede ser: *¿si el triángulo ABD no fuera isósceles, se podría construir un rombo?* ¿Y si fuera equilátero? **Estas preguntas permiten anticipar bajo qué condiciones se puede obtener un rombo**.

3. Este triángulo es la mitad de un paralelogramo en el que una de sus diagonales es el segmento AD. Construí el paralelogramo usando los instrumentos que necesites.



Es posible que algunas niñas o algunos niños consideren que los lados opuestos deben ser paralelos pero al momento de realizar la construcción dicha relación no la pongan en juego. Dicho de otro modo, **el hecho de que la construcción sea realizada "a ojo" –por ejemplo usando sólo la regla–no significa que el o la estudiante no sepa cuáles son las relaciones que caracterizan al paralelogramo**. La diferencia entre un paralelogramo construido con regla y escuadra para lograr que los lados opuestos sean paralelos y otro construido "a ojo" es que en la primera se puede asegurar dicha relación geométrica, mientras que en la segunda no.

Por último, como un paralelogramo está conformado por dos triángulos, los problemas 4,5,6,7 y 8 tienen la intención de revisitar la propiedad triangular para deducir cuáles son las condiciones para las cuales es posible construir dichos cuadriláteros.

Construcciones que involucran cuadrados, rombos y rectángulos. Análisis del problema 1 (página 80)

En este apartado se propone la tarea de construir distintos cuadriláteros dados ciertos datos. Hemos mencionado en la introducción que este tipo de tarea, bajo ciertas condiciones, favorece el estudio de las propiedades del objeto en cuestión ya que en el intento por atrapar en una representación las propiedades que caracterizan la figura, las o los estudiantes ponen en relación el dibujo con dicho referente teórico.

Ya hemos visto que una variable didáctica en la tarea de realizar una construcción tiene que ver con los instrumentos de geometría que se habilitan. Por ejemplo, en el ítem a) se ha tomado la decisión que los y las estudiantes construyan un cuadrado usando transportador y regla o escuadra.

Otra variable didáctica a tener en cuenta es el tipo de hoja a trabajar (lisa, cuadriculada o rayada). En este caso se propone trabajar en hoja lisa para que los y las estudiantes no apelen al paralelismo y a la perpendicularidad que ya portan los renglones o la cuadrícula.

Escuelas En Foco

Construir cuadriláteros

1. Realizá las siguientes construcciones y respondé en tu carpeta.

a. Este es uno de los lados de un cuadrado.

- Construí la figura usando transportador y regla o escuadra.
- ¿Es posible construir más de un cuadrado distinto con estos datos?

b. Este es uno de los lados de un rombo.

- Construí la figura usando los instrumentos que necesites.
- ¿Es posible construir más de un rombo distinto con estos datos?

c. Estos son dos lados de un rectángulo.

- Construí la figura usando transportador y regla.
- Realizá otra construcción usando escuadra y regla.

En el ítem a), al trabajar en hoja lista, quizás algún grupo construya el cuadrado usando regla graduada para asegurarse la igualdad de los lados pero la perpendicularidad la logre “a ojo”. En este caso, una posible intervención docente es *¿cómo saben que los ángulos son rectos?* Ante la imposibilidad de responder esta pregunta, se puede preguntar: *¿qué instrumentos permiten trazar ángulos rectos?*

Con respecto al ítem b), si a algún grupo no se le ocurre ninguna estrategia para construir un rombo dado el lado, la o el docente puede volver a la actividad 2 de la página 76 y preguntar *¿qué características tenía ese triángulo? ¿Cómo se puede construir un rombo a partir de un triángulo?*

En la discusión colectiva además de analizar las distintas construcciones, se puede proponer la tarea de construir un cuadrado usando compás, regla no graduada y escuadra no graduada[4]. En el caso de que no haya surgido, también se puede proponer la construcción de un rombo con compás y regla no graduada. La intención de esta tarea es que los y las estudiantes recuperen el trabajo realizado

[4] Posteriormente hay una actividad donde se tiene que construir un cuadrado solamente con regla no graduada y compás.

con la circunferencia tanto para trasladar medidas como para asegurar la igualdad de los lados apelando a la noción de radio.

Una vez discutida la cantidad de soluciones para cada ítem es interesante preguntar por qué en los ítems a) y c) se puede construir un único cuadrado y un único rectángulo respectivamente mientras que en el ítem b) se pueden construir infinitos rombos con ese lado.

Por ejemplo, para el caso del rombo, seguramente cada grupo va a construir un rombo distinto. En este caso se espera concluir que como los ángulos del rombo no están determinados, hay infinitas construcciones posibles, tal como se muestra en las imágenes 9 y 10

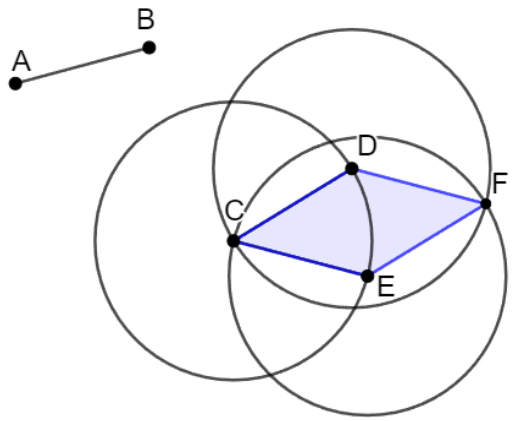


Imagen 9: Una posible estrategia es hacer una circunferencia centro C y radio AB y luego elegir dos puntos de ella (D y E).

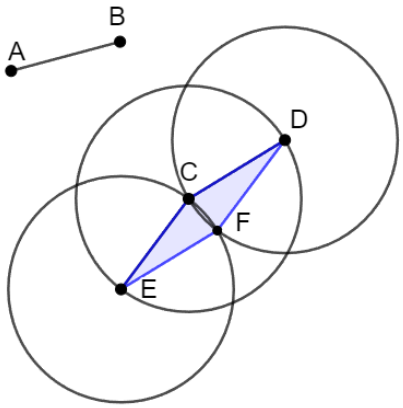


Imagen 10: Cada selección de puntos D y E determina un ángulo ECD distinto.

Otra conclusión a tener en cuenta para este bloque de actividades —también relacionada con la cantidad de soluciones—es que la posición de cada cuadrilátero no es una característica de la figura. La intención es romper con la idea de que, por ejemplo, para obtener un cuadrado un par de lados opuestos deben construirse de manera horizontal en relación con la hoja. Continuando con el ejemplo del cuadrado, por la misma razón se puede concluir que si dos cuadrados tienen la misma longitud del lado –aunque estén en distinta posición– se los considera congruentes.

Construcciones que involucran paralelogramos. Análisis del problema 1 (página 81)

En este bloque de actividades se proponen distintas construcciones que involucran paralelogramos teniendo en cuenta diferentes datos. Asimismo, se espera que las y los estudiantes relacionen dichas construcciones con el trabajo realizado con triángulos.

d. Utilizando los instrumentos de geometría que necesites, investigá si es posible construir:
- Dos paralelogramos distintos que tengan lados de 3 cm y de 5 cm.
- Dos rectángulos distintos que tengan lados de 3 cm y de 5 cm.

e. Estos son dos lados consecutivos de un paralelogramo.

- Construilo teniendo en cuenta que forman un ángulo de 40°.
- ¿Es posible construir más de un paralelogramo distinto con estos datos?
  - Si la respuesta es no, explicá por qué.
  - Si la respuesta es sí, construí uno distinto.

f. Usando regla y transportador, construí un paralelogramo que tenga un lado de 5 cm, y en el que los ángulos que comparten ese lado midan 40° y 140°, y el otro lado mida 3 cm.

g. Usando regla y compás, construí un paralelogramo que tenga un lado de 4 cm y una diagonal de 6 cm.
- ¿Cuántos paralelogramos distintos pueden construirse?
- Si es posible construir más de un paralelogramo, agregá un dato de manera que la construcción sea única.

Como las construcciones propuestas en los ítems d), e) y f) involucran lados y ángulos del paralelogramo, los y las estudiantes deberán recurrir al uso de la regla y la escuadra para trazar paralelas y al uso del transportador para determinar las amplitudes dadas. Aunque a veces el paralelismo de los lados opuestos queda determinado por los datos brindados, tal como se muestra en la imagen 11

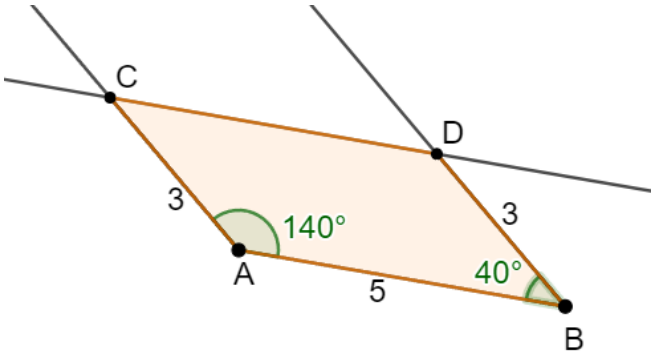


Imagen 11: Construcción del paralelogramo dados dos lados y los ángulos que comparten uno de esos lados.

En este caso, los ángulos de 140° y 40° garantizan el paralelismo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Además, como C y D quedan definidos por la longitud de 3 cm, el segmento CD también queda determinado. Entonces, en el caso del ítem f) se puede construir el paralelogramo sin recurrir al paralelismo de los lados opuestos. Para abordar el motivo de por qué resultan paralelos es necesario contar con el conocimiento de ángulos entre rectas paralelas y una transversal.

En cuanto al estudio de la cantidad de soluciones, teniendo en cuenta que un paralelogramo se puede construir a partir de un triángulo, en determinadas ocasiones se puede apelar al trabajo realizado en las páginas 40, 41,42 y 43 del libro *Estudiar y Aprender en 7mo*. Por ejemplo, hemos visto que dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos se puede construir un único triángulo. Entonces, esto mismo va a ocurrir con el paralelogramo propuesto en el ítem e).

En el ítem g) se propone construir un paralelogramo dado un lado y una diagonal. Aunque este ítem puede resultar más complicado porque los y las estudiantes deben considerar una diagonal, las conclusiones son parecidas a las del ítem d) ya que se puede pensar que dichos datos son lados de un triángulo. Por otro lado, al no poder recurrir a la regla y escuadra para poner en juego el paralelismo de los lados opuestos, es necesario apelar al uso del compás para asegurar la igualdad de dichos lados, tal como se muestra en la imagen 12.

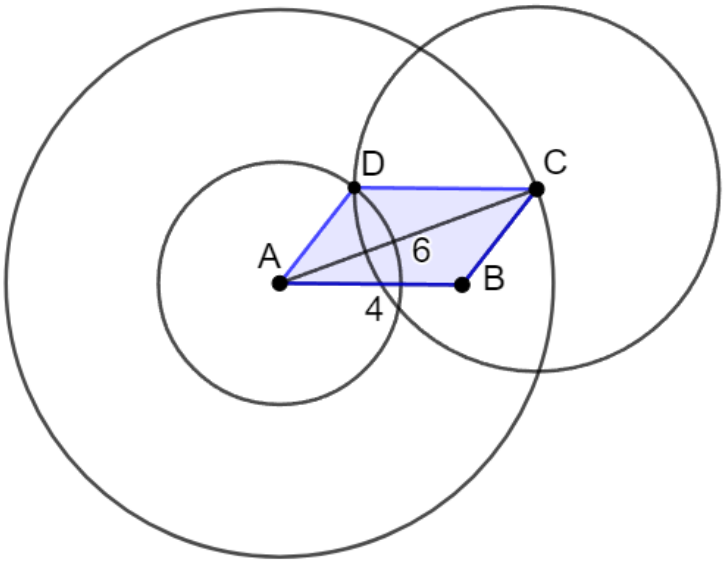
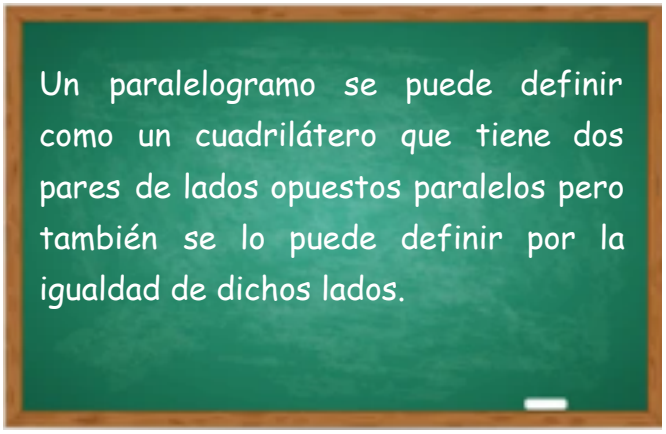


Imagen 12: Construcción del paralelogramo con regla graduada y compás. Una vez construido el triángulo ABC, para determinar el vértice D se trazó una circunferencia de centro A y radio BC y una circunferencia de centro C y radio AB.

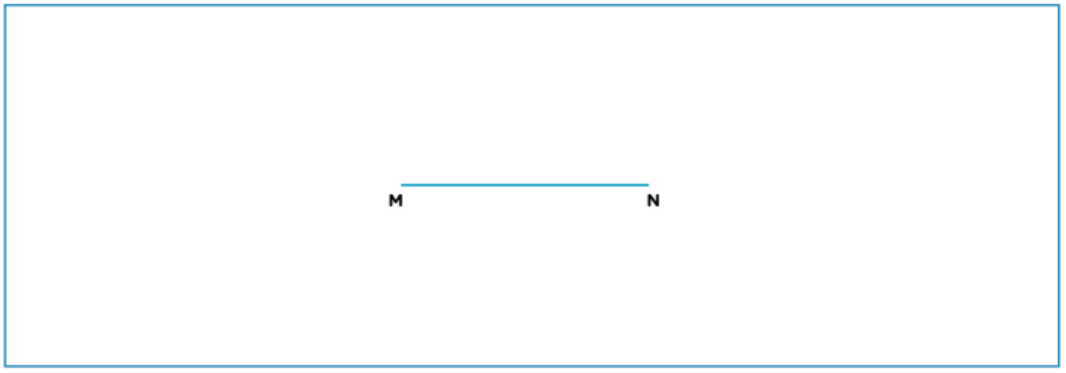
Como cierre de este bloque de problemas se puede proponer que:



Mediatriz de un segmento. Análisis de los problemas 1 al 8 (páginas 84 a 86)

El objetivo de este bloque de problemas es abordar la definición de mediatriz de un segmento como la recta perpendicular a él y que pasa por su punto medio. Asimismo, se pretende estudiar el concepto de mediatriz como lugar geométrico; es decir, como los puntos del plano que equidistan de los extremos de dicho segmento.

1. Usando regla y compás, encontrá, si es posible, lo pedido en cada caso.



a. Un punto que esté ubicado a 1 cm tanto de M como de N. ¿Hay más?
b. Un punto que esté ubicado a 2 cm tanto de M como de N. ¿Hay más?
c. Dos puntos que estén ubicados a 5 cm tanto de M como de N. ¿Hay más?

2. En el dibujo de arriba, marcá otros puntos que estén a la misma distancia de M y de N.
a. ¿Cuántos puntos cumplen lo pedido? ¿Cómo podés hacer para marcarlos a todos?

.....

.....

Para arribar a la definición de mediatriz de un segmento. se pretende que en los problemas 1 y 2 los y las estudiantes recurran a la circunferencia para hallar los puntos pedidos y discutir cuándo es posible que cumplan las condiciones y cuándo no; esta es una buena oportunidad para revisitar la propiedad triangular.

Como se muestra en la imagen 13, para determinados radios las circunferencias no se intersecan.

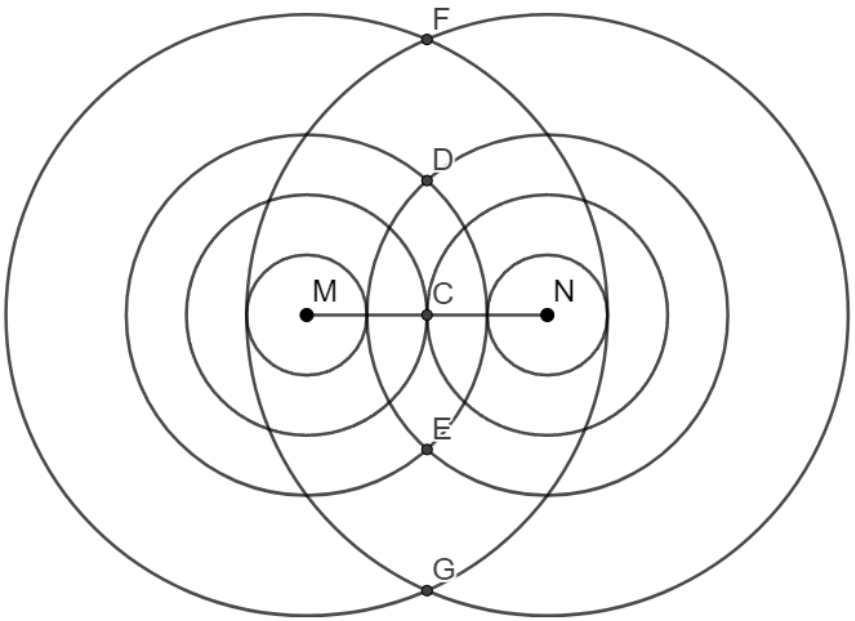


Imagen 13: Los puntos F, D, C, E y G están a igual distancia de A que de B.

En la discusión colectiva se puede aprovechar la diversidad de puntos marcados para plantear el debate sobre la cantidad de soluciones y para preguntar si la distancia de dichos puntos a los extremos del segmento puede ser cualquiera.

Una posible respuesta puede ser que hay infinitos puntos a igual distancia de A que de B porque el radio puede ser tan grande como se quiera. Ante esta respuesta, por un lado, la o el docente puede preguntar si el radio solamente admite números naturales y por el otro, si esa distancia puede ser cualquier valor.

Con respecto a la pregunta *¿Cómo podés hacer para marcarlos a todos?* es probable que se responda que es imposible porque son infinitos. Quizás, otro grupo haya identificado que los centros de las circunferencias estén alineados y responda que todos los puntos de la recta que los contiene están a igual distancia de A que de B.

En relación a la perpendicularidad, el o la docente puede elegir un punto de recta –además del punto medio del segmento– y dar la tarea de comparar los dos

triángulos que quedan determinados, por ejemplo, el punto D de la imagen 14. Para dicha tarea puede preguntar: *¿qué tienen en común esos triángulos?*

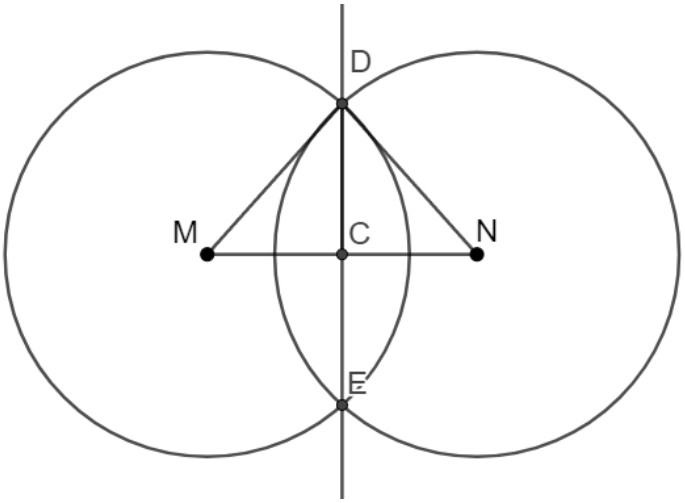


Imagen 14: Comparación de los triángulos MCD y NCD.

En este caso se puede argumentar que $\overline{MD} = \overline{DN}$ porque el radio de las circunferencias es el mismo. Además, $\overline{MC} = \overline{CN}$ porque C es punto medio del segmento. Y por último, el lado CD es compartido. Por lo tanto, al tener dos triángulos con tres lados correspondientes iguales, podemos afirmar que son congruentes (propiedad trabajada anteriormente).

Entonces, al ser los triángulos son congruentes, los ángulos correspondientes son iguales. En particular $\hat{MCD} = \hat{NCD}$. Y como dichos ángulos forman un ángulo llano, cada uno debe medir 90°, tal como se muestra en la imagen 15.

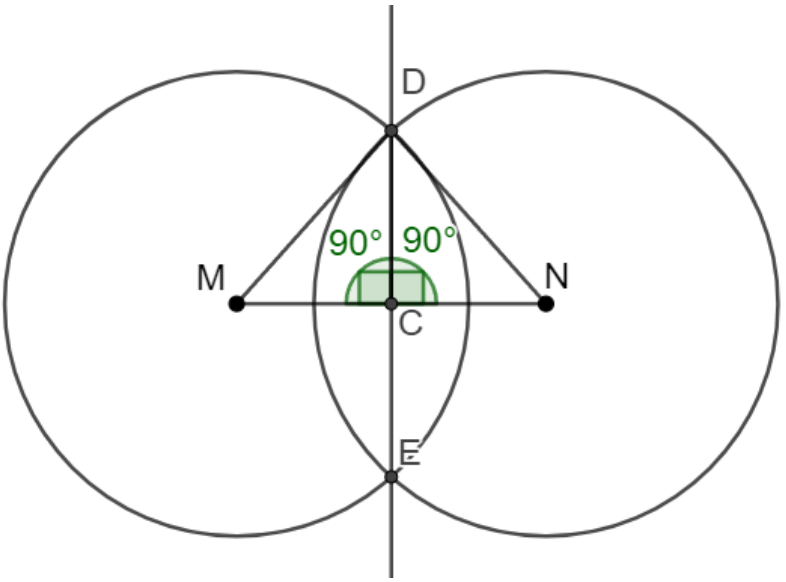
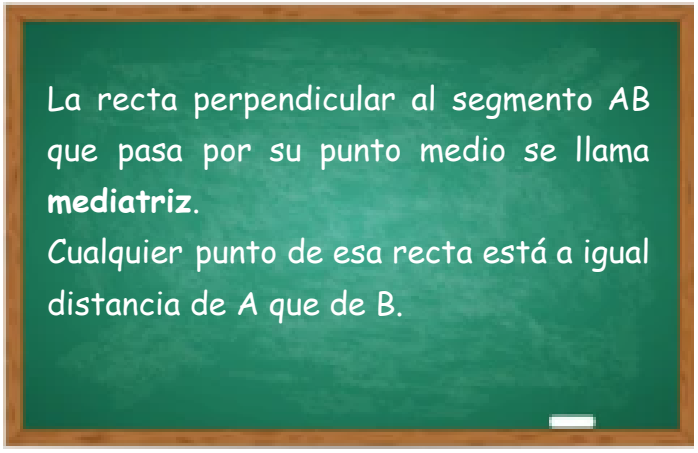


Imagen 15: Como los triángulos MCD y NCD son congruentes, los ángulos DCM y NCD son rectos.

Seguramente las niñas y los niños no utilizarán un vocabulario tan formal y es probable que esta argumentación requiera de bastantes intervenciones docentes. Sin embargo, creemos posible sostener este tipo de validaciones en los últimos años de la escuela primaria.

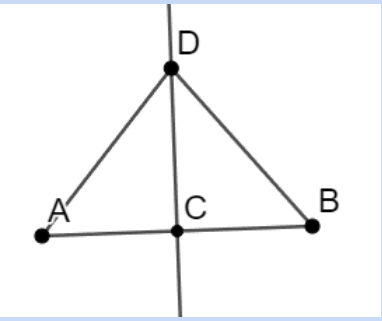
Desde nuestro punto de vista, **abordar estas validaciones en el segundo ciclo de la escuela primaria permite que las y los estudiantes puedan realizar explicaciones apoyadas en las propiedades de las figuras prescindiendo de la medida**.

Como conclusión puede escribirse en un afiche que:



Para seguir trabajando sobre las explicaciones argumentativas, en la clase siguiente se puede proponer el siguiente problema:

Dado un segmento AB, Julián trazó su mediatriz con regla graduada y escuadra y eligió el punto D de la recta. Para explicar por qué ese punto está a igual distancia de A que de B, comparó los triángulos ACD y BCD.



¿Cómo pudo argumentar que los lados AD y BD son iguales?

Lo interesante es que en esta oportunidad los datos cambian en relación a la argumentación anterior. Aquí se sabe que los ángulos ACD y BCD son rectos, mientras que antes era la relación que queríamos argumentar. Consideramos que esta diferencia entre qué relaciones geométricas son datos y cuáles se quieren argumentar es muy difícil de identificar para las y los estudiantes. Por este motivo, es propicio que se enfrenten a varias de estas actividades para que puedan construir dicho conocimiento.

En este caso, los dos triángulos tienen un lado en común ($\overline{DC}$), dos lados iguales ($\overline{AC} = \overline{CB}$) y el ángulo comprendido igual (cada uno de 90°). Por la propiedad trabajada anteriormente, podemos asegurar que los triángulos son congruentes. Por lo tanto, como los lados AD y DB son iguales, la distancia entre D y A es igual a la distancia entre D y B.

3. Escribí las instrucciones que le darías a alguien que quiera trazar la mediatriz de un segmento AB usando regla no graduada y compás. Compartila con el resto del grado y analicen si hay diferencias.

.....

.....

.....

En este problema se propone que las y los estudiantes produzcan diferentes técnicas para trazar la mediatriz del segmento. Por ejemplo, un procedimiento posible es trazar dos circunferencias de igual radio en cada extremo, tal como se muestra en la figura 16.

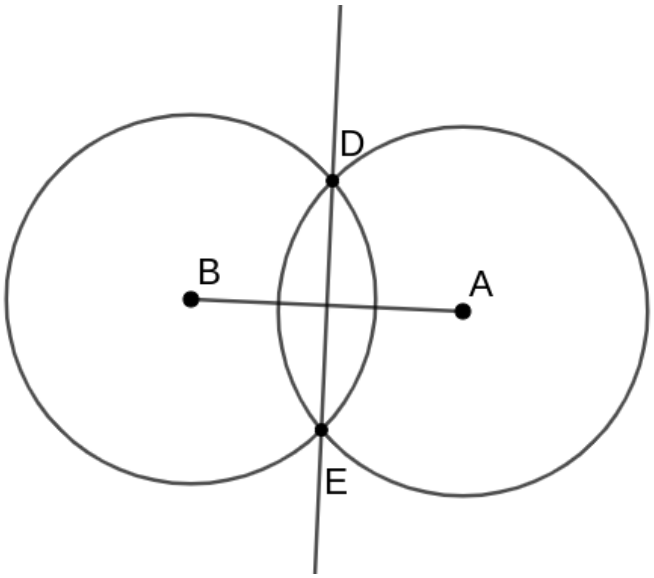


Imagen 16: Técnica tradicional (muchas veces se trazan “arquitos”) del trazado de la mediatriz de un segmento AB.

En este caso, la o el docente, puede preguntar: *¿el radio de las circunferencias, puede tomar cualquier valor?* La intención de esta pregunta es que las niñas y los niños anticipen para qué valores las dos circunferencias se van a intersecar.

Puede ocurrir que algún grupo modifique el radio de las circunferencias para hallar el segundo punto de la recta (ver imagen 17).

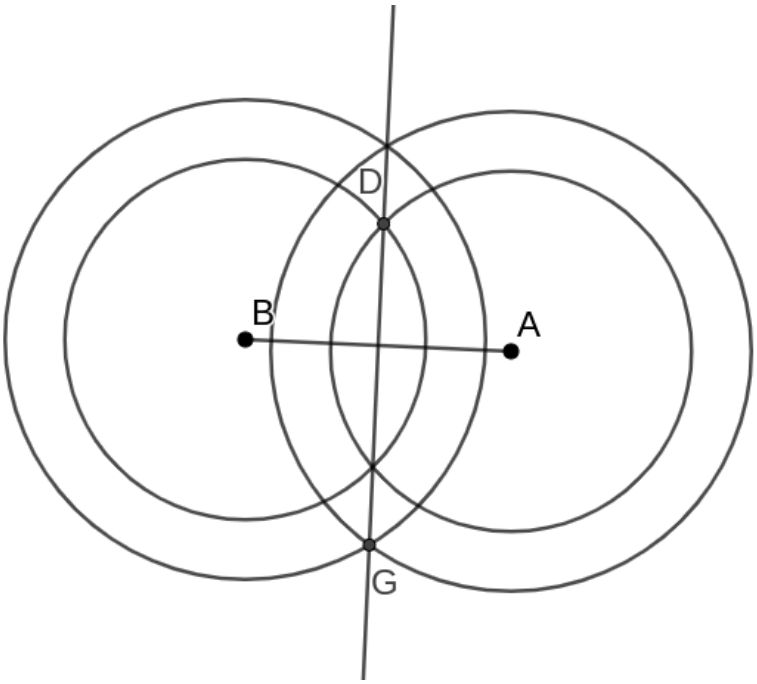
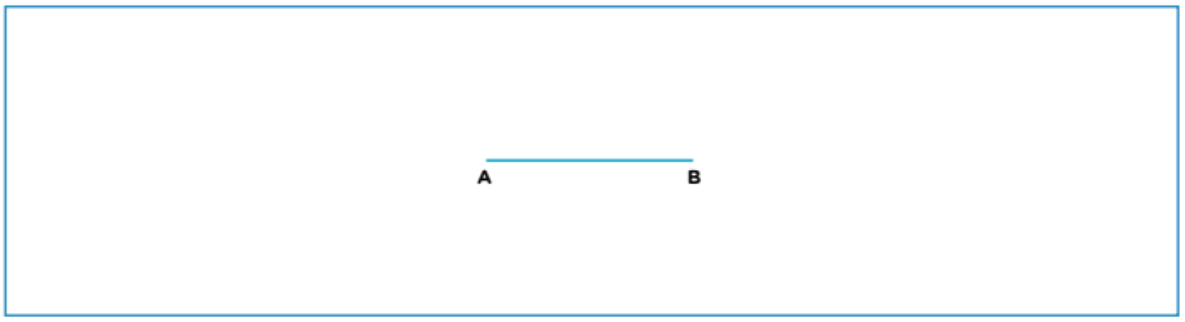


Imagen 17: Trazado de la mediatriz del segmento AB con 4 circunferencias.

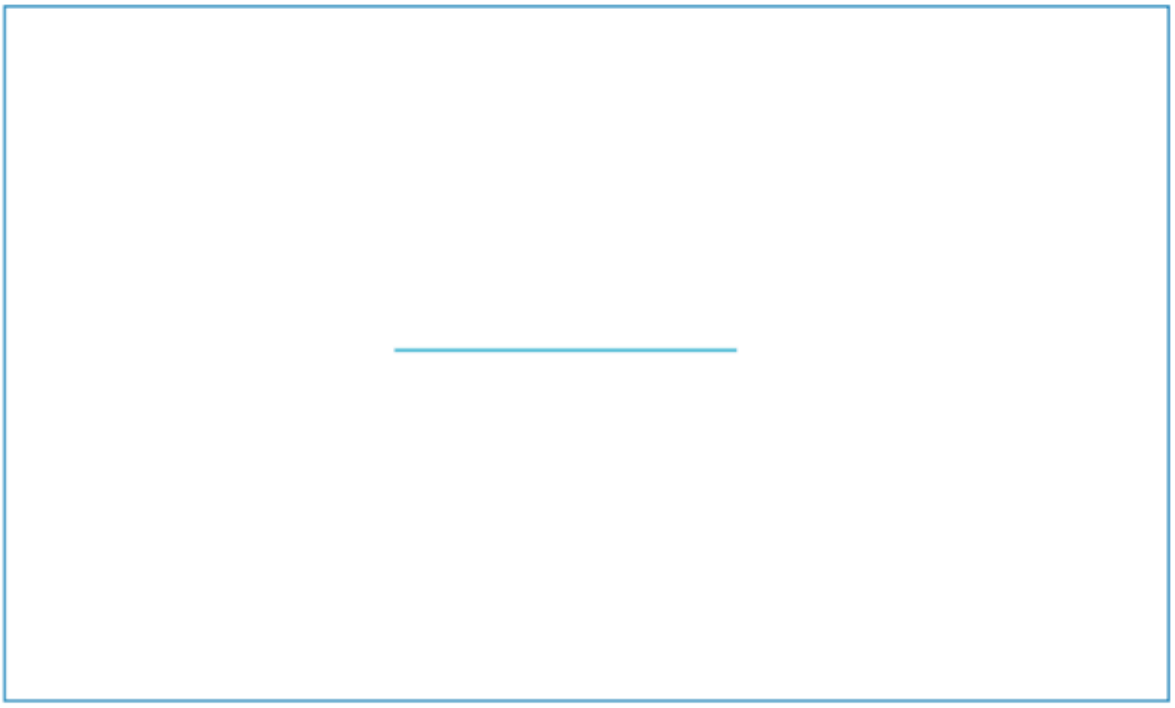
Si esta estrategia no surge en clase, se puede contar el proceso de construcción para analizarla. También puede ocurrir que algún grupo necesite más de dos puntos para trazar la recta y trace más circunferencias.

La intención es concluir que cualquier punto que equidiste de A y de B va a pertenecer a la mediatriz y como una recta queda definida por dos puntos, es suficiente esa cantidad para trazarla.

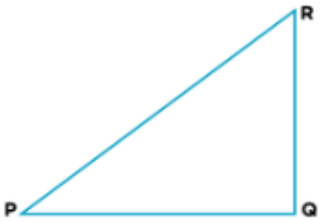
4. Trazá la mediatriz del segmento AB usando regla no graduada y compás.



5. Usando regla no graduada y compás, dividí el siguiente segmento en cuatro partes iguales.



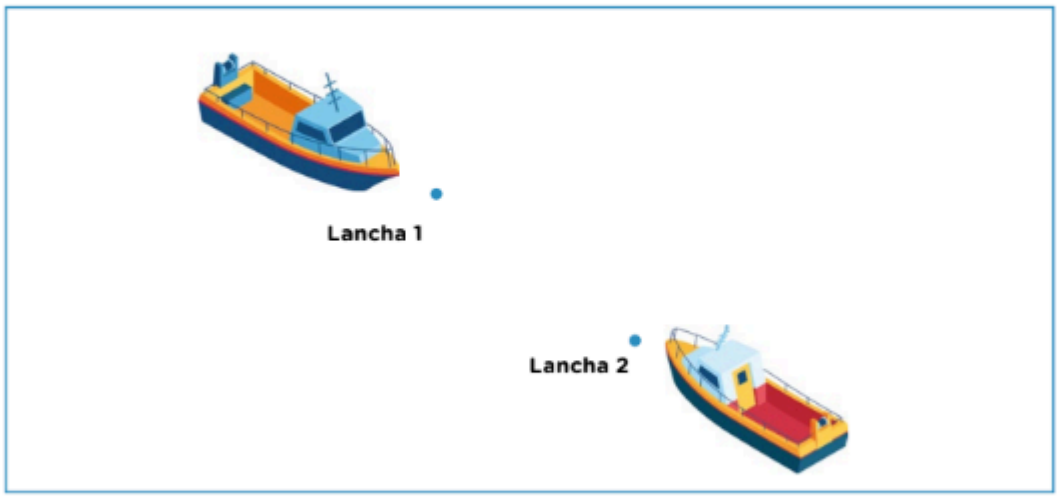
6. La siguiente figura es un triángulo rectángulo en Q. Usando regla no graduada y compás, copiá la figura.



7. Usando regla no graduada y compás, copiá el siguiente cuadrado.

8. El siguiente esquema muestra la ubicación de dos lanchas que se encuentran pescando en el mar. Una tercera lancha se acerca a la zona y quiere ubicarse para pescar, de manera que las tres se encuentren a la misma distancia una de otra.

a. Ubicá en este esquema el lugar en donde debe estar esa tercera lancha.



b. ¿Hay un único lugar en donde puede estar esa tercera lancha? Si creés que sí, explicá por qué. Si creés que no, marcá todos los lugares donde podría ubicarse.

Los problemas 4,5,6,7 y 8 son actividades para que las y los estudiantes identifiquen que el concepto de mediatriz está involucrado. En particular, en los problemas 6 y 7 tendrán que reconocer que la mediatriz permite construir ángulos rectos. Por ejemplo, para construir un cuadrado con regla no graduada y compás, es necesario duplicar los lados para que, al trazar la mediatriz de ese nuevo segmento, el vértice del ángulo recto coincida con el extremo del segmento original, tal como se muestra en la imagen 18.

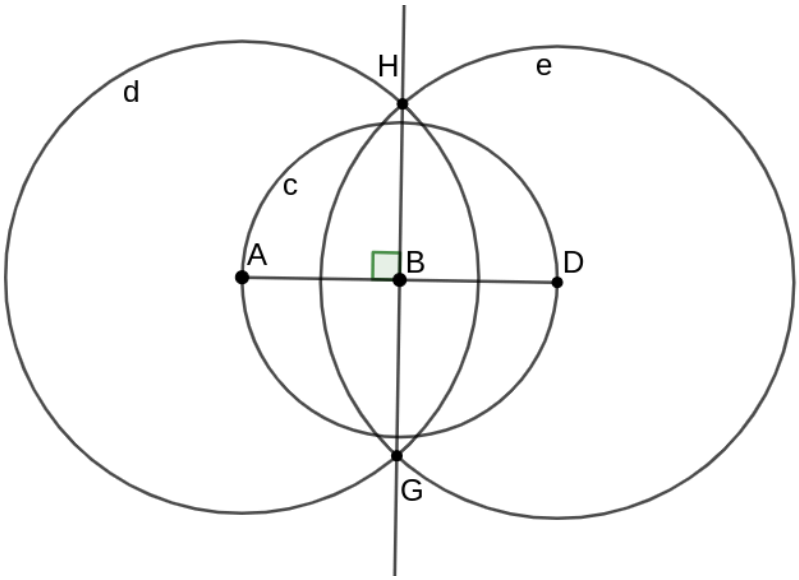


Imagen 18: Trazado de un ángulo recto con regla no graduada y compás.

Más precisamente, dado un segmento AB, si se quiere trazar un ángulo recto en B primero hay que duplicar la longitud de dicho segmento. Con lo cual, al no contar con regla graduada, es necesario trazar una circunferencia (*c*) con centro en B y radio AB, prolongar el segmento y definir el punto intersección (D) entre $\overline{AB}$ y la circunferencia. Entonces para que el ángulo recto tenga vértice en B, hay que trazar la bisectriz del nuevo segmento AD.

Lo mencionado en el párrafo anterior no es natural para las niñas y los niños, con lo cual requerirá de cierta intervención docente. Por ejemplo, *¿al trazar la mediatriz de un segmento, dónde queda determinado el ángulo recto? ¿sirve trazar la mediatriz del segmento AB?*

El trabajo con el programa GeoGebra

En la introducción hemos mencionado la riqueza didáctica que tiene la tarea de construir una figura. Al realizar una construcción geométrica mediante determinados instrumentos geométricos, se requiere considerar algunas de las relaciones que caracterizan al objeto geométrico en cuestión, así como identificar el modo de plasmar dichas relaciones en el dibujo.

Proponemos la inclusión del programa GeoGebra en la enseñanza de la geometría ya que se trata de un *software* que ha sido creado como una herramienta de enseñanza con una perspectiva que permite poner en primer plano la caracterización de las figuras a partir de las relaciones entre sus elementos. Para que un dibujo realizado en GeoGebra —que representa a cierto objeto teórico— mantenga invariante las propiedades involucradas, es necesario apelar a las herramientas que se vinculan con las relaciones que definen al objeto en cuestión.

Mediante dicho programa es posible explorar, conjeturar y analizar las propiedades de las figuras mediante el movimiento de sus representaciones. Cuando se quiere realizar una construcción, no es suficiente con poner en juego visualmente una relación geométrica, sino que es necesario definirla a través de las herramientas del programa. Esta característica permite generar un espacio de trabajo que posibilita sostener, desde la propuesta de enseñanza, la centralidad de las propiedades de las figuras y de las relaciones geométricas involucradas.

Antes de comenzar con el trabajo propuesto se recomienda abordar algunos de los problemas planteados en el documento *Estudiar y aprender en 6to con orientaciones* para que las y los estudiantes se familiaricen con el programa GeoGebra resolviendo actividades más sencillas.

Versión del problema 3 con GeoGebra (página 41)

Ingresen al siguiente archivo. Los puntos A y B están a 4 unidades de distancia. ¿Dónde hay que ubicar al punto C para que se pueda construir un triángulo ACB que tenga un lado AC de 5 unidades y un lado CB de 3 unidades?

Al abrir el archivo, las niñas y los niños se encontrarán con una barra de herramientas personalizada[5] y con dos segmentos a 4 unidades de distancia, donde el punto A se puede mover por toda la pantalla mientras que B se desplaza sobre

[5] Para ver cómo se personaliza la barra de herramientas ingresar aquí.

una circunferencia de centro A y radio 4. En el video de la imagen 1 se puede ver cómo se diseñó el archivo.

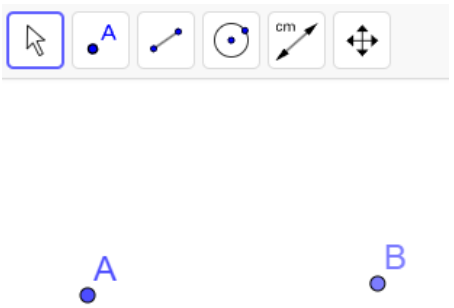


Imagen 1: Pantalla que se visualiza al ingresar al archivo.

Archivo GeoGebra

Es probable que en los primeros trabajos co*n GeoGebra,* las y los estudiantes ubiquen un punto “a ojo” y luego con la herramienta *Distancia* lo muevan hasta que cumpla con las condiciones pedidas, tal como se muestra en la imagen 2.

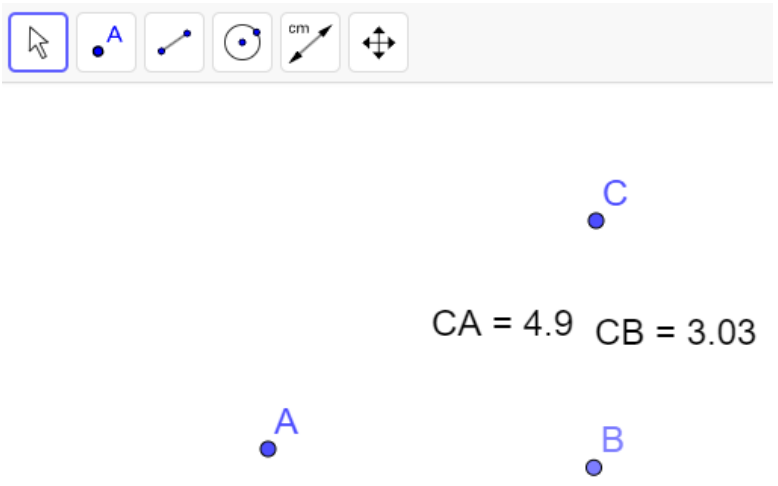


Imagen 2: Intento de ubicar el punto C a 5 unidades de A y a 3 unidades de B

Como se puede ver en el video de la imagen 2, es muy difícil de lograr que el punto C cumpla las dos condiciones simultáneamente. Esta es una buena oportunidad para que la o el docente realice alguna intervención, como por ejemplo: *si la condición fuese una sola, por ejemplo, encontrar todos los puntos que están a 5 unidades de A, ¿qué otra herramienta te permite hallar todos esos puntos?* Con esta pregunta se espera recuperar la idea de circunferencia el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de otro.

Si las chicas y los chicos identifican que la circunferencia permite hallar los puntos pedidos, tendrán que decidir cuáles de las herramientas disponibles van a utilizar.

Por ejemplo, podrían utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y luego ajustar las medidas para que C cumpla lo pedido (ver imagen 3).

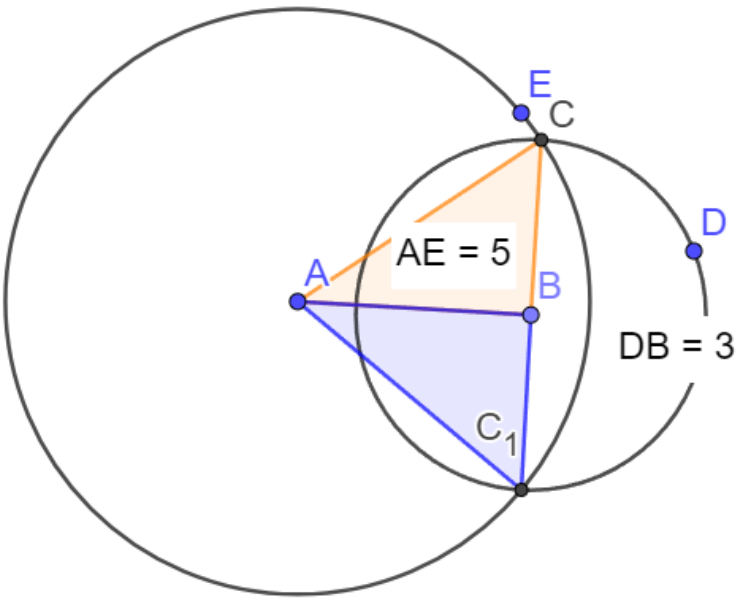


Imagen 3: Los puntos C y C_1 fueron hallados ajustando el radio de las

circunferencias a partir de los puntos E y D.

También puede ocurrir que algún grupo decida utilizar la herramienta *Circunferencia: centro y radio* para hallar los puntos C que cumplen las condiciones. Lo interesante de esta estrategia —además de lo económica— es que mantiene las relaciones geométricas frente al movimiento. En cambio, en las anteriores, como se utilizó el movimiento para lograr ciertas condiciones, al arrastrar los puntos esas condiciones no se mantienen. **Dicho de otra manera, en GeoGebra, es necesario definir las relaciones geométricas para que se mantengan invariante frente al movimiento. Esto no quiere decir que se invaliden las construcciones que pierden las relaciones geométricas ya que en los ejemplos mencionados también hay conocimientos geométricos puestos en juego**.

Versión del ítem a) de la actividad 1 con GeoGebra (página 6)

Con las herramientas disponibles, construí un cuadrado con GeoGebra.

Cabe destacar que en el enunciado no se explicita que las relaciones que caracterizan al cuadrado se mantengan invariantes al arrastrar los puntos móviles de la construcción ya que esta es una **cuestión a ser debatida en el aula**. Desde nuestro punto de vista, el hecho de que el cuadrado “no se desarme” es un asunto de discusión y negociación con las y los estudiantes. Analicemos algunos ejemplos.

Las primeras veces que se utiliza GeoGebra es común que se intente construir un cuadrado utilizando la herramienta *Polígono* y después se ajusten los lados para que sus longitudes sean todas iguales eligiendo una medida particular, como se observa en la imagen 4.

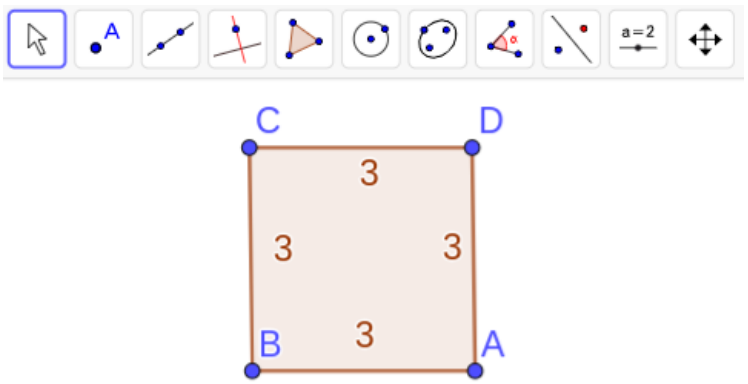


Imagen 4: Se construyó un polígono y luego se ajustaron los lados para que todos midan 3 unidades.

Archivo GeoGebra

Luego, aunque es muy engorroso, con la herramienta *Ángulo* se podría lograr que todos los ángulos midan 90°.

En otras ocasiones una construcción puede mantener invariante frente al movimiento algunas relaciones geométricas y otras no. Por ejemplo, se pueden trazar rectas perpendiculares para asegurarse los ángulos rectos pero luego la igualdad de los lados realizarla arrastrando los vértices de los segmentos, tal como se muestra en la imagen 5.

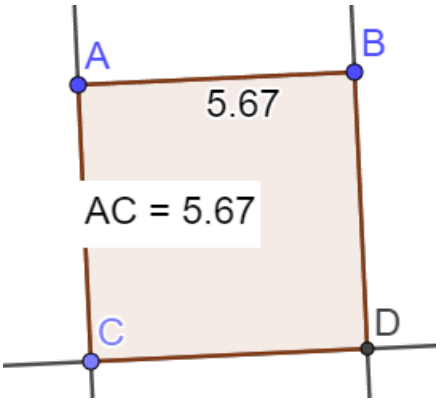


Imagen 5: Al construir el cuadrado algunas relaciones se mantienen invariante frente al movimiento y otras no. La longitud de los segmentos coincidió porque en este caso el programa estaba configurado para trabajar con dos cifras decimales.

Archivo GeoGebra

En este caso podemos ver que al mover A, B o D el cuadrado se preserva pero que al mover C el cuadrilátero pasa a ser un rectángulo propiamente dicho.

Nuevamente, de estas dos estrategias podemos destacar que el hecho de que una construcción se desarme no significa que la persona que la realizó no conozca las propiedades del objeto geométrico que se intentó representar. En un principio suele ocurrir que la o el estudiante no tiene interés en que se preserven las relaciones frente al movimiento y luego la razón de que se desarme la figura puede deberse a que aún no se identificaron cuáles son las herramientas que el programa exige. Es decir, **la o el estudiante puede creer que en GeoGebra basta con visualizar cierta relación geométrica y que no es necesario definirla a través de las herramientas.**

Cuando ya se tiene un conocimiento más avanzado del programa es posible realizar diversas construcciones de un cuadrado de manera tal que las relaciones que lo caracterizan se mantengan invariante frente al movimiento. Por ejemplo, es posible trazar un segmento AB y después dos rectas perpendiculares (*g* y *h*) que pasan por cada uno de sus extremos. Luego construir dos circunferencias con centro en cada extremo de radio AB. Finalmente, los otros dos vértices del cuadrado resultan de la

intersección entre cada recta y la circunferencia respectivamente (ver imagen 6).

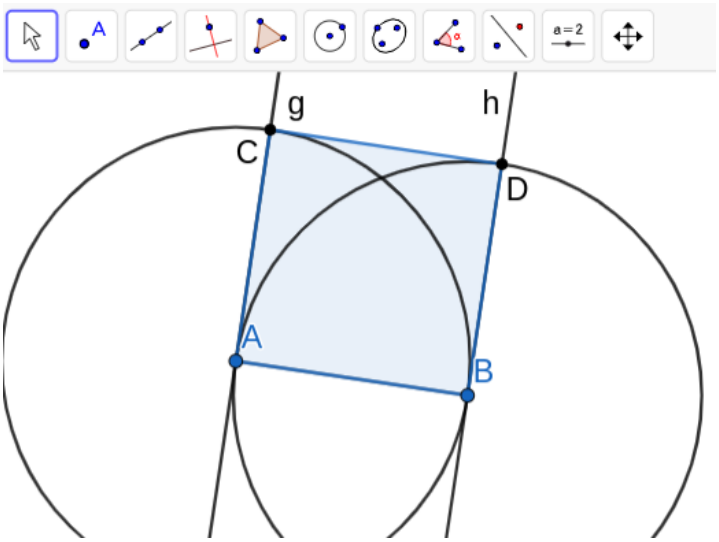


Imagen 6: Construcción de un cuadrado que mantiene las relaciones puestas en juego frente al movimiento.

Archivo GeoGebra

Como se puede apreciar en el video de la imagen 6, en esta construcción se mantienen invariantes las relaciones que caracterizan a un cuadrado y como al mover los puntos A y B se generan “todos” los cuadrados posibles podemos decir que se construyó la ***familia*** de cuadrados.

Versión del problema 1 con GeoGebra: mediatriz (página 84)

Ingresá al siguiente archivo. Con las herramientas disponibles encontrá puntos que estén a la misma distancia de A que de B. ¿Cuántos puntos cumplen lo pedido? ¿Cómo podés hacer para marcarlos a todos?

Al abrir el archivo, las niñas y los niños se encontrarán con un segmento de longitud 4 unidades donde el punto A se puede mover por toda la pantalla y el punto B sobre una circunferencia de centro A y radio 4, tal como se muestra en la imagen 7.

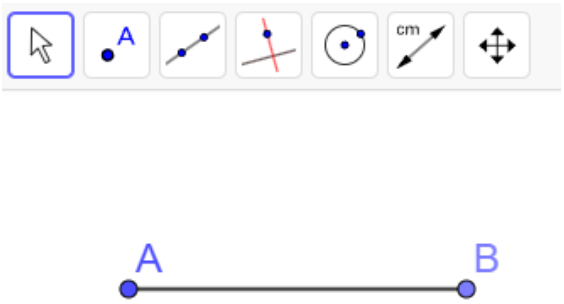


Imagen 7: Pantalla que se visualiza al abrir el archivo.

Archivo GeoGebra

En el caso de que las niñas y los niños pregunten a qué distancia tiene que estar el punto de A y de B, la o el docente les puede proponer que empiecen con un valor determinado.

En general, las y los estudiantes primero encuentran el punto medio del segmento. Dicho punto lo pueden hallar “a ojo” o con la herramienta *Medio o centro* (ver imagen 8).

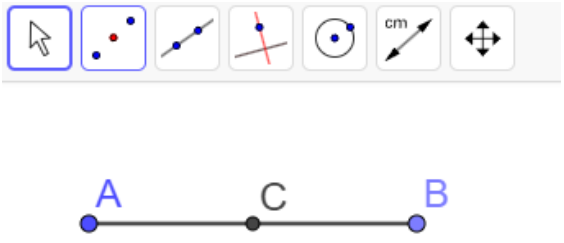


Imagen 8: El punto medio del segmento AB fue hallado con la herramienta *Medio o Centro*.

Ante el intento de hallar más puntos equidistantes de A y B, si en algún grupo no está disponible el conocimiento de que la circunferencia de cierto radio (con centro en cada extremo) permite hallar puntos a igual distancia de A y de B, es probable que surjan estrategias más artesanales como por ejemplo marcar un punto y ajustar la distancia con la herramienta *Mueve* (ver imagen 8).

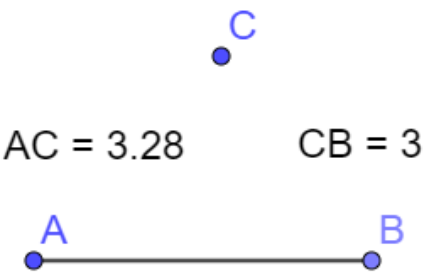


Imagen 8: Intento de ubicar un punto a 3 unidades de A y de B

Como se puede visualizar en el video, al igual que ocurre con la versión del problema 3 con GeoGebra, esta estrategia resulta muy compleja porque el punto C tiene que cumplir dos condiciones simultáneamente. En este caso, se puede remitir a las y los estudiantes a revisitar dicho problema.

Una vez identificado que la circunferencia permite hallar los puntos pedidos, con la herramienta *Circunferencia: centro y radio* se pueden marcar algunos de dichos puntos (ver imagen 9).

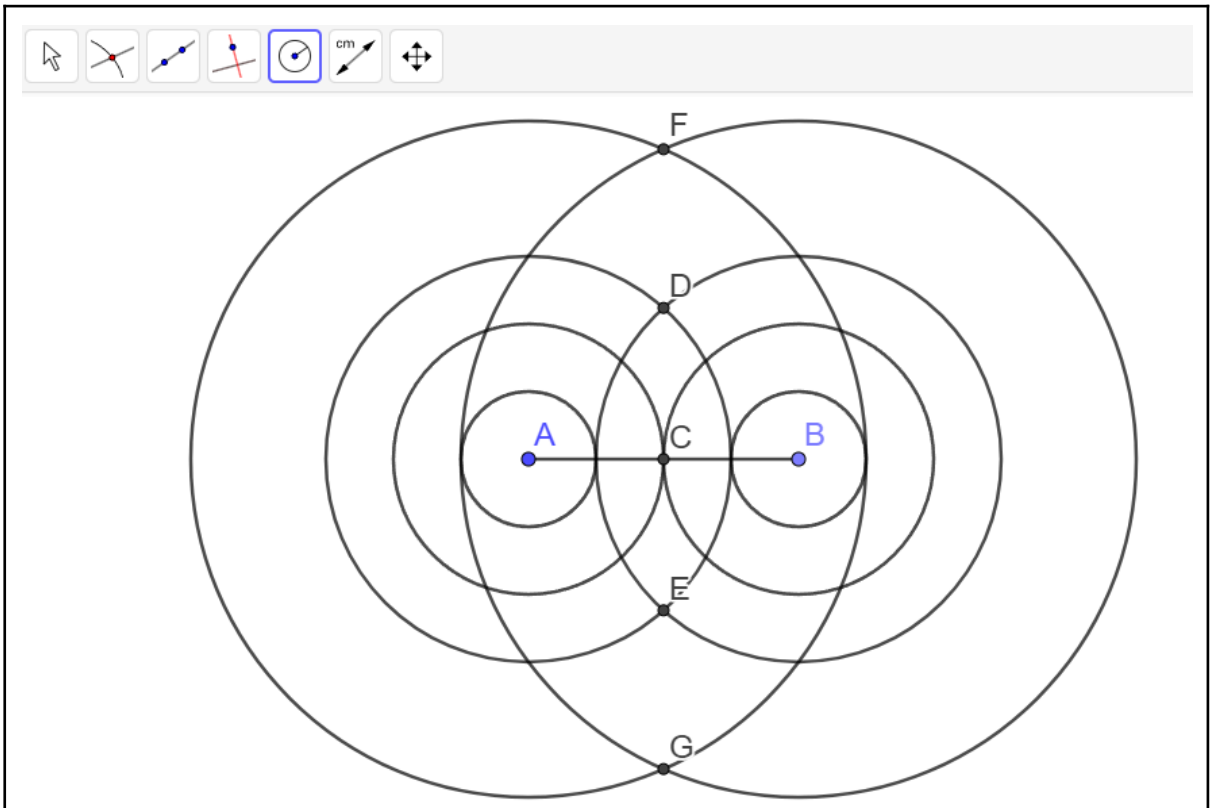


Imagen 9: Trazando circunferencias se pueden hallar algunos de los puntos pedidos.

Archivo GeoGebra

Como hemos mencionado en la página 25, en la discusión colectiva se puede aprovechar la diversidad de puntos marcados para plantear el debate sobre cuántos hay que cumplen lo pedido y si la distancia de esos puntos a los extremos del segmento puede ser cualquiera. También, en la página 27 proponemos como conclusión de este recorrido definir la mediatriz de un segmento como la recta perpendicular a él y que pasa por su punto medio. Asimismo, también se puede notar su interpretación como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Como conclusión destacamos que la definición de mediatriz es un punto de llegada a partir del trabajo de las y los estudiantes. **Es decir, se invierte el camino muchas veces utilizado en geometría de partir de una definición para usarla luego en alguna construcción o cálculo. Aquí se promueve la construcción por parte de las y los estudiantes –junto al docente–de una definición, a la que se llega como síntesis de un trabajo de exploración y análisis (Sessa et al, 2021).**

Bibliografía

Duval, R; Godin, M. y Perrin-Glorian, M.J. (2004). Reproduction de figures à l'école élémentaire. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 7*, 5-89.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría.* El Zorzal.

Itzcovich, H., Arias, D., Grimaldi, V., Murúa, R., y Segal, S. (2022). El arrastre en un programa de geometría dinámica. Su dominio de validez como asunto de interacción entre estudiantes y docentes. *Revista De Educación Matemática*, *37*(1), 7–30. https://doi.org/10.33044/revem.37472

Itzcovich, H. y Murúa, R. (coords.). (2022). La enseñanza de la geometría: primeras experiencias con GeoGebra. Unipe Editorial Universitaria. Recuperado de: https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/herramientas/ense%C3%B1anza-de-la-geometr%C3%ADa-primeras-experiencias-con-geogebra-detail

Itzcovich, H., y Murúa, R. (2018). GeoGebra: «nuevas» preguntas sobre «viejas» tareas. *Yupana*, (10), 71–85. https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7698

Itzcovich H. y Murúa, R (2022). Primeros contactos de un grupo de docentes de escuela primaria con GeoGebra: tensiones entre conocimientos geométricos y el uso del programa. *Revista de Educación Matemática* (México) *34* (3), 329-351. https://doi.org/10.24844/EM3403.12

Murúa, R., Luna, J.P., Quiroga, A., Maciejowski, F. y Borsani, V. (2023). Geometría en Movimiento. Plan Nacional de Inclusión Digital Educativa. Conectar Igualdad. Disponible en:

https://recursos.conectarigualdad.edu.ar/publicaciones/158444

Murúa, R. y Becerril, M. (2021). *Transiciones entre primaria y secundaria:* circunferencia, círculo y triángulos. Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en:

https://www.educ.ar/recursos/157794/transiciones-circunferencia-circulo-y-triangulos-cuaderno-pa

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14* (1.2), 165-210.

Perrin-Glorian, M.J. y Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école, 222*, 26-36.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo n° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Recuperado de:

https://buenosaires.gob.ar/sites/default/files/media/document/2018/11/15/498f4110635ffbfaadf47e3b09ddd5d69d9b82b2.pdf

Sessa et al (2007). Aportes para la enseñanza. Matemática-Geometría. Ministerio de Educación, CABA. Recuperado de:

https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf

Sessa, C., Murúa R. y Maffei S. (2021). Las alturas de un triángulo: la construcción de su definición en Chemello G., Agrasar M. (Eds.), *Entre docentes I: Matemática para el aula de ciclo básico de secundaria*. UNIPE Editorial Universitaria. Disponible en:

https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/herramientas/entre-docentes-i-matema%CC%81tica-para-el-aula-de-ciclo-b%C3%A1sico-de-secundaria-detail