Escuelas En Foco

Estudiar y aprender en sexto
Geometría
Notas para docentes

Introducción

Diferentes investigaciones sobre la enseñanza de la geometría (Duval et al., 2004; Laborde y Capponi, 1994; Perrin-Glorian y Godin, 2014; Sadovsky et al.,1998) han estudiado el valor formativo que tiene el trabajo en el aula a partir de la construcción de figuras. Este tipo de tarea, bajo ciertas condiciones, favorece el estudio de las propiedades del objeto en cuestión ya que en el intento por atrapar en una representación las propiedades que caracterizan la figura, las o los estudiantes ponen en relación el dibujo con dicho referente teórico.

Acordamos con las investigadoras mencionadas y los investigadores mencionados en que este tipo de trabajo favorece el pasaje desde una posición perceptiva a una posición productiva en términos del análisis o el establecimiento de las relaciones que caracterizan a estos objetos geométricos.

En el segundo ciclo de la escuela primaria se tiene la intención que las y los estudiantes construyan mediante los instrumentos de geometría, la representación de un objeto geométrico teniendo en cuenta las relaciones que lo caracterizan. Esas relaciones suelen quedar en el terreno de lo implícito con lo cual es necesario que la o el docente habilite un espacio de discusión cuyo objetivo sea explicitar cuáles fueron las propiedades puestas en juego en cada construcción.

Con respecto a los instrumentos de geometría, se propone que la precisión y la destreza en su uso no sea un objeto de estudio en sí mismo sino que estén al servicio de la resolución de problemas y de las conceptualizaciones geométricas.

En relación a las argumentaciones, una tarea de construcción también puede motorizar un trabajo deductivo en el que es necesario identificar el modo de plasmar dichas relaciones en la construcción e identificar cuáles de los instrumentos de geometría permiten llevarla a cabo. Asimismo, se espera que la o el estudiante valide por qué el dibujo realizado representa ese objeto. Desde el punto de vista del docente, esta última instancia plantea el problema didáctico de cómo negociar la necesidad de validar este texto con sus estudiantes.

En definitiva se propone un trabajo dialéctico entre una geometría con el foco puesto en la observación, en la manipulación de los instrumentos de geometría y en validaciones empíricas apoyadas en lo que se ve y en lo que se dibuja y una geometría más deductiva, donde lo central es el estudio de las figuras y sus propiedades (Murúa et al, 2023).

Con respecto al trabajo en el aula, acordamos con Quaranta y Wolman (2003) en que una o un estudiante no aprende matemática si no resuelve problemas, pero esta es una condición necesaria, no suficiente: tampoco aprende matemática si sólo resuelve problemas. Es decir, proponemos una enseñanza de la matemática basada en que las niñas y los niños resuelvan problemas —puede ser en un primer momento de manera individual y luego en pequeños grupos—pero luego creemos que es indispensable que haya momentos de discusiones colectivas. En estos espacios —usualmente denominado como *puestas en común*—esperamos que, además de poner en común las resoluciones de las y los estudiantes, la o el docente proponga relacionar las estrategias desplegadas, abra nuevas preguntas y nuevos asuntos de discusión, descontextualice los conocimientos abordados y los formalice. Quaranta y Wolman mencionan que estos espacios no son "eventos naturales" de la vida en el aula sino que las y los docentes son las encargadas y los encargados de planificar y gestionar dichos espacios.

Situaciones que involucran puntos y distancias: Circunferencia y círculo
Análisis de los problemas 1, 2, 3 y 4 (páginas 63 y 64)

La intención de estas situaciones es que las y los estudiantes construyan (o recuperen) la noción de circunferencia y círculo y el análisis de las propiedades que porta el uso del compás. Recordamos que la circunferencia se puede pensar como el lugar geométrico[1] de los puntos que equidistan de otro llamado centro.

[1] El lugar geométrico se puede definir como el conjunto de puntos que cumplen determinada condición.

1. Trazá todos los puntos que encuentres que estén a 2 cm de A. Luego, compará con dos compañeros/as sus producciones. ¿Todos/as marcaron los mismos puntos?

• A

Para resolver este problema resulta esperable que se utilice la regla graduada para marcar varios puntos que están a 2 cm de A. En este caso, la cantidad de puntos podrá variar dependiendo de la exhaustividad con la que las niñas y los niños realicen esta tarea.

Quizás las y los estudiantes no comprendan de inmediato que el compás es un instrumento que permite determinar todos los puntos que equidistan de otro. Sin embargo, podrían "sospechar" que la figura formada por los posibles puntos es una circunferencia.

A continuación, presentamos algunas estrategias que podrían desplegarse en el aula:

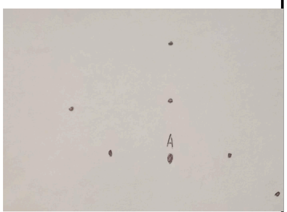
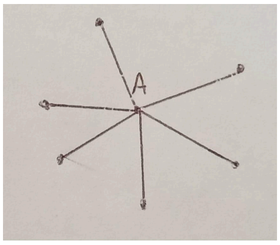
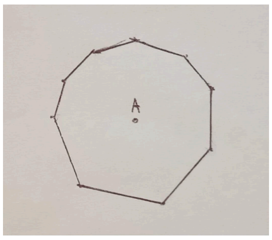
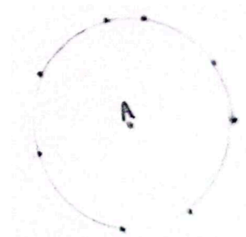
			

Imagen 1: Se replica la distancia de 2cm a partir del último punto marcado.	Imagen 2: En esta producción quizás se considera el segmento como parte de la respuesta a	Imagen 3: Se unieron los puntos con segmentos.	Imagen 4: Una vez trazada la circunferencia se marcaron los puntos.

	comunicar.		

La variedad de producciones y las **interacciones en el aula** ofrecen una oportunidad para explorar cuántos puntos pueden marcarse a 2 cm de A. **El intercambio entre pares** las y los ayudará a enriquecer el campo posible de puntos a marcar. Si las niñas y los niños se conforman con los pocos puntos marcados, la o el docente podrá invitar a pensar qué opinan sobre lo que realizaron sus compañeras y compañeros al interior de pequeños grupos.

En la **discusión colectiva** se espera que las chicas y los chicos argumenten cuáles son los posibles puntos que cumplen la condición pedida. Como en el siguiente problema se trabaja sobre la cantidad de soluciones, en esta oportunidad se puede concluir que hay "muchos", "varios" o infinitos puntos a 2 cm de A. La discusión sobre las diversas producciones —especialmente las que están incompletas— podrá girar en torno a los siguientes interrogantes: *¿los puntos marcados están a 2 cm de A? ¿Hay más? ¿Por qué?*

2. Lucas y Andrea están comparando lo que realizaron en la actividad anterior.

a. Conversá con un/a compañero/a y respondan en sus carpetas. ¿Alguno de los procedimientos señala todos los puntos que se encuentran a 2 cm de A? ¿Cómo podemos asegurarnos?

El problema 2 es una oportunidad para argumentar por qué el trazado de la circunferencia atrapa todos los puntos que cumplen con dicha condición. El uso del compás implica comenzar a poner en juego relaciones que podrían ser desconocidas y que luego comenzarán a hacerse explícitas.

En esta actividad es posible promover la reflexión sobre cómo el trazo curvo se compone por *infinitos puntos*. Asimismo, sabemos que esta idea de *infinitud de* *puntos* es difícil de atrapar en la escuela primaria. Una manera de argumentar que el trazo curvo contiene infinitos puntos es mediante la idea de que entre dos puntos que pertenecen a la circunferencia —por más cercanos que estén— siempre es posible marcar otro punto que también pertenece a dicha circunferencia[2].

Otra cuestión para discutir colectivamente es “cuánto hay que abrir el compás” y “dónde pinchar” para atrapar todas las soluciones del problema: puntos que equidistan de otro llamado centro.

Al final de esta actividad se puede escribir colectivamente en un afiche los conceptos que se van construyendo sobre la circunferencia y sus “elementos” (centro y radio) y cómo se pone el juego la utilización del compás. Será importante tener disponible este recurso en el aula para utilizarlo en futuros problemas[3].

La **circunferencia** está conformada por todos los puntos que están a igual distancia de un punto dado (el centro).

La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se denomina **radio**.

Se la suele representar con un **segmento** cuyos extremos son el centro y un punto de la circunferencia.

En el compás, el **centro** queda determinado por el lugar donde se pincha y el **radio** por la abertura de sus “brazos”.

---

[2] Esta idea se puede abordar mediante el concepto de “zoom”. La ventaja de trabajar con el programa GeoGebra es que dispone de una herramienta que acerca (o aleja) los objetos (ver imagen 9 de la página 31).

[3] Las conclusiones que se presentan en este documento son orientativas. Se espera que en cada aula el texto dependa de lo que se vaya construyendo colectivamente junto a las y los estudiantes.

3. Utilizando lo que trazó Andrea en la **actividad 2** de la **página 63**, buscá la manera de marcar todos los puntos que se encuentren a menos de 2 cm de A.

4. Comparen sus producciones entre todos/as. Escriban en sus carpetas una explicación, para un/a compañero/a que haya faltado, sobre cómo hacer para que queden todos los puntos trazados.

El problema 3 busca que las niñas y los niños puedan identificar y describir los puntos que cumplen con la condición de estar a menos de 2 cm de A. Es esperable que consideren marcar puntos que están a 1 cm, a partir de la idea de que "menos de 2 cm tiene que ser 1 cm", apoyándose en el orden de los números naturales.

En la discusión colectiva se puede plantear preguntas sobre la posibilidad de marcar otros puntos que cumplan la condición. Por ejemplo, indicando un punto del círculo que no esté a 1 cm instalará la posibilidad de marcar otros. En este caso, una posible intervención puede ser: *¿este punto está a menos de 2?* En ese intento de ir marcando "muchos puntos" se podría preguntar: *¿cómo podemos hacer para marcarlos todos?* Es posible que algunas niñas y algunos niños se den cuenta de que toda la región del círculo determina la ubicación de los puntos a distancia menor de 2 cm. En el caso de no surgir una respuesta, la o el docente puede comunicar que la manera de responder esta pregunta es pintando toda la región de los puntos que cumplen lo pedido.

Otro asunto que es posible discutir es la diferencia entre círculo y circunferencia. Como síntesis de la actividad se puede definir al círculo involucrado en este problema "como el conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor o igual a 2 cm"

En el problema 4 se propone una instancia de reflexión sobre lo realizado. En particular, **se tiene la intención de que las y los estudiantes puedan explicitar las relaciones entre el instrumento y las propiedades que porta**. Durante este proceso se pueden plantear las siguientes intervenciones: *¿cuánto es necesario abrir el compás? ¿Dónde se pincha? ¿Se puede establecer alguna relación entre el uso del compás y el radio y el centro?* **Estas preguntas darán lugar a explicitar relaciones entre el uso del compás, la noción de circunferencia y los conceptos radio y centro**.

La escritura de conclusiones podrían quedar registradas en un afiche para ser retomadas o revisadas a medida que se avanzan en nuevos aprendizajes.

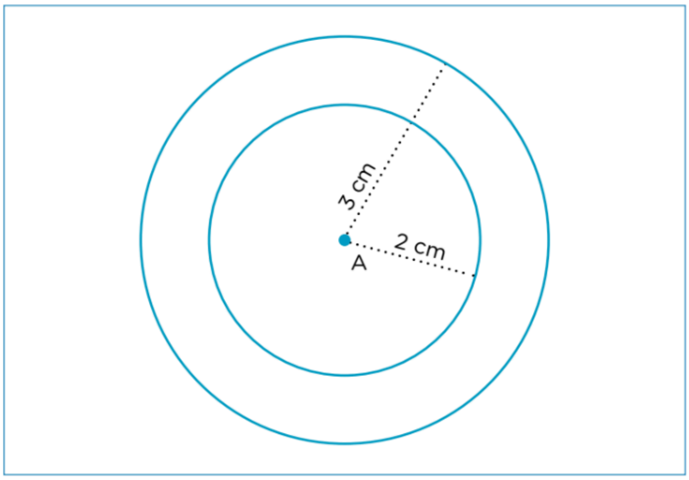
Una “vuelta de tuerca” sobre las nociones de circunferencia y círculo

Análisis de los problemas 5, 6 y 7 (páginas 64 y 65)

En este bloque de problemas se pretende continuar el trabajo con la noción de circunferencia, en particular, con los objetos que la definen: el centro y el radio Asimismo, se recupera el concepto de círculo abordado en el problema 3 del bloque anterior.

5. Pintá siguiendo las instrucciones.

- Con **rojo**, todos los puntos que están a 2 cm de A.
- Con **azul**, todos los puntos que están a más de 2 cm y menos de 3 cm de A.
- Con **verde**, todos los puntos que están a más de 3 cm de A y dentro del rectángulo.



En el problema 5 se pretende que las niñas y los niños estudien cuáles son las condiciones que tiene que cumplir un punto para que esté a una distancia determinada de otro (en este caso el centro de las dos circunferencias), a una distancia mayor o que cumpla dos condiciones en relación con su distancia a dicho punto. Para sombrear las regiones azules y verdes, las y los estudiantes tendrán que recuperar lo trabajado en el problema 3 pero con la dificultad de que en esta oportunidad se presentan dos circunferencias. A pesar de que en dicha actividad se ha abordado la noción de círculo, en este problema quizás vuelvan a surgir producciones que reflejen la complejidad del salto de línea (dimensión 1) a superficie (dimensión 2).

Con respecto a la cantidad de puntos que cumplen las condiciones planteadas en cada ítem, habrá que llegar a un acuerdo sobre la imposibilidad de dibujar infinitos puntos que pertenecen a determinada superficie; cuestión ya trabajada en el problema 2 con respecto a la circunferencia. Es por esta razón que al pintar una región (o una curva) se entiende que se están pintando todos los puntos que pertenecen a ella. Como vimos en el análisis del bloque anterior, muchas niñas y muchos niños necesitan ver los puntos dibujados con un pequeño círculo para conceptualizar sus respuestas.

Con respecto a la discusión colectiva, resaltamos nuevamente la importancia de este momento de la clase donde se discuten las diferentes respuestas al problema. Las niñas y los niños tendrán la oportunidad de analizar si los puntos están a una distancia mayor que 2 cm y menor que 3 cm del punto A o a una distancia mayor que 3 cm **sin necesidad de realizar mediciones**. Se pueden analizar producciones incompletas donde estén marcados varios puntos o incluso circunferencias concéntricas de centro A con radio entre 2 y 3 cm y mayor a 3 cm. Mediante algunas intervenciones estas estrategias se pueden completar pintando las zonas sobre los puntos ya encontrados.

6. Trazá en tu carpeta dos circunferencias **concéntricas**, es decir, que compartan el mismo centro.
- Una de ellas, de 4 cm de radio, y la otra, de 7 cm de radio.
- Trazá un diámetro de la circunferencia más grande y marcá los puntos que estén sobre ese diámetro y a 7 cm del centro a la vez.
- Compará tu producción con la de algún/a compañero/a. ¿Marcaron los mismos puntos?

En relación al problema 6[4], aunque se retoma la noción de círculo, su objetivo principal es profundizar sobre los conceptos de radio y diámetro. Por otro lado, a diferencia de los problemas anteriores, en esta oportunidad las y los estudiantes tienen que seguir una serie de pasos para realizar una construcción y luego analizar cuáles son los puntos que cumplen las dos condiciones simultáneamente.

En la discusión colectiva se puede preguntar: *¿cuántos puntos hay que cumplen lo pedido? ¿Dónde los marcaron? ¿Por qué no pueden estar en otro lugar del diámetro?* Al comparar los puntos marcados, como cada grupo habrá trazado un diámetro distinto, quizás se llegue a la conclusión de que hay infinitos puntos que cumplen lo pedido: todos los que pertenecen a la circunferencia de radio 4 cm. Sin embargo, se espera concluir que **para cada** diámetro trazado, hay dos puntos que pertenecen a él y además están a 4 cm de A; dichos puntos provienen de la intersección entre el diámetro y la circunferencia pequeña, tal como se muestra en la imagen 5.

[4] En el segundo ítem hay un error en el valor pedido. En realidad hay que encontrar los puntos del diámetro trazado que están a 4 cm del centro de las circunferencias concéntricas.

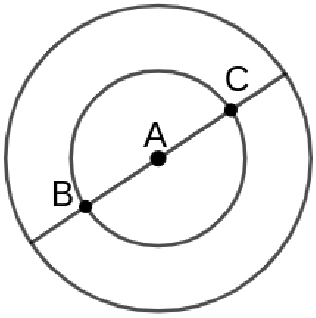
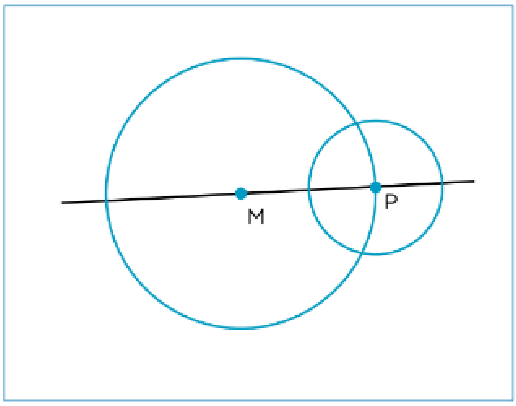


Imagen 5: B y C son los puntos intersección entre el diámetro y la circunferencia de radio 4 cm.

7. Un grupo de estudiantes está jugando a escribir instrucciones para poder copiar esta figura. De estos tres instructivos, ¿cuál o cuáles corresponden a la figura dibujada? Marcalos con una **X**.



PARA TENER EN CUENTA

Intersección: lugar donde se encuentran dos figuras. Puede ser un punto, dos puntos o más.

☐ **Instructivo 1**

- Trazá una recta y, sobre ella, un punto M.
- Trazá una circunferencia de 4 cm de diámetro y con centro en M.
- Marcá el punto P en una de las intersecciones entre la circunferencia de centro M y la recta trazada.
- Trazá una circunferencia de centro P de 1 cm de radio.

☐ **Instructivo 2**

- Trazá una recta y, sobre ella, un punto M.
- A 4 cm de M, sobre la misma recta, marcá un punto y llamalo P.
- Trazá una circunferencia de 4 cm de diámetro y con centro en M.
- Trazá una circunferencia de centro P de 1 cm de radio.

☐ **Instructivo 3**

- Trazá una recta y, sobre ella, un punto P.
- Trazá una circunferencia de 2 cm de diámetro y con centro en P.
- A 2 cm del punto P sobre la misma recta, marcá el punto M.
- Trazá una circunferencia de centro M de 2 cm de radio.

Para abordar el problema 7, aconsejamos trabajar antes con actividades de copiado de figuras geométricas[5]. Por un lado para que las niñas y los niños hayan tenido la experiencia de copiar una figura y por el otro porque es necesario llegar a ciertos acuerdos relacionados con este tipo de tarea. Por ejemplo: la posición de la figura no es una propiedad geométrica (se suelen dibujar las rectas o los segmentos de manera horizontal en relación a la hoja), una figura es copia de otra cuando se

[5] Para profundizar sobre la tarea de copiar una figura, recomendamos leer el Documento de trabajo nº5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, página 19.

pueden superponer[6] (aceptando cierto margen de error), las relaciones geométricas de la copia tienen que ser las mismas que las de la figura original, etc.

El problema 7 tiene dos objetivos centrales. Por un lado se pretende que las y los estudiantes pongan en juego la noción de circunferencia, centro, radio y diámetro —y la relación entre estos dos últimos conceptos— y por el otro, que relacionen una figura con el texto que la define en el contexto de la tarea de copiar una figura geométrica.

Por ejemplo, al seguir el instructivo 3, es posible obtener las siguientes figuras:

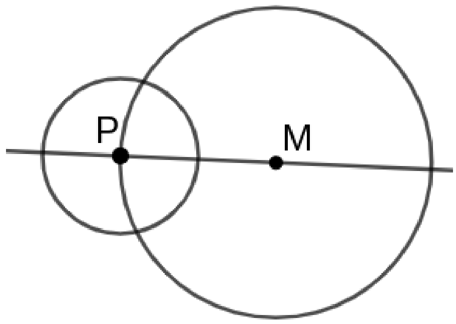
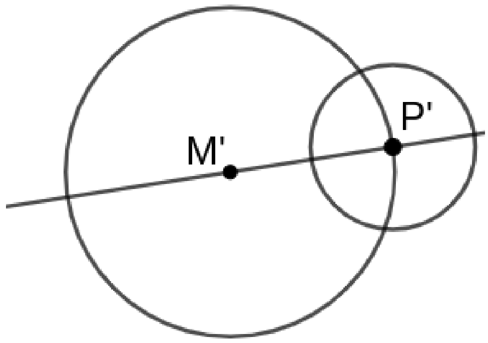
	

Imagen 6: Construcción que resulta de elegir el punto M a la derecha de P.	Imagen 7: Construcción que resulta de elegir el punto M a la izquierda de P.

Una vez marcado el punto P y trazada la circunferencia de radio 1 cm, se pide “a 2 cm del punto P sobre la misma recta, marcá el punto M”. Es aquí donde tenemos dos posibilidades ya que hay dos puntos a 2 cm de P que pertenecen a la recta trazada anteriormente. Es por esta razón que quizás haya grupos que digan que la figura de la imagen 6 no es una copia de la original porque la ubicación de los puntos es distinta.

Lo mencionado en el párrafo anterior se puede aprovechar para que sea un asunto a debatir en la discusión colectiva. Por ejemplo, se puede preguntar si la imagen 6 es una copia porque el punto P está a la izquierda de M, mientras que en la figura original es al revés. Para validar que es una copia, se puede recortar la imagen y comprobar que se puede superponer con la figura original. Esta misma cuestión ocurre con el instructivo 1.

[6] Esta forma de validación solamente se tiene en cuenta si la tarea consiste en copiar una figura a igual escala.

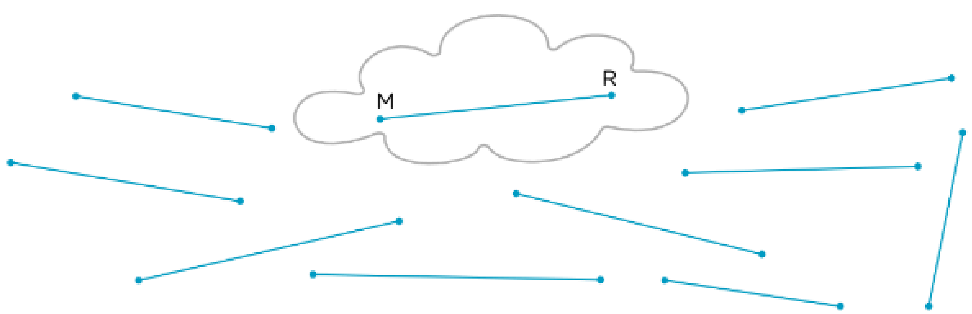
En relación al instructivo 2 se pueden hacer intervenciones para que las niñas y los niños argumenten por qué no se corresponde con la figura dada. Por ejemplo: *¿en qué paso se comienza a obtener una figura distinta? ¿Qué modificación le podrían hacer para que se corresponda con la figura original?*

Una conclusión interesante que puede quedar registrada es que ***dada una figura, puede haber más de un texto que se relaciona con ella*** (en este caso los instructivos 1 y 3). Esto ocurre porque, por ejemplo, el orden de construcción puede ser distinto y además porque las relaciones geométricas pueden estar expresadas de distintas maneras.

Situaciones que ponen en juego el uso del compás para trasladar medidas. Análisis de los problemas 1 y 2 (páginas 66 y 67)

Con la colección de problemas de este apartado se pretende promover en las alumnas y los alumnos la exploración y el uso del compás para comparar y trasladar longitudes. Se ponen en tensión dos ideas provisorias presentes en la mayoría de las y los estudiantes. Una es que ese instrumento sirve sólo para dibujar círculos, circunferencias o arcos de circunferencias y, la otra, es que la magnitud longitud, puede ser medida sólo con el metro, el centímetro o, en este caso, la regla graduada.

1. Utilizando solo el compás, decidí cuáles de los siguientes segmentos miden lo mismo que el segmento $\overline{MR}$.



En el problema 1 resulta esperable que algunas niñas y algunos niños intenten recurrir a la regla graduada para encontrar los segmentos que tienen igual longitud. Será necesario entonces que la o el docente intervenga indicando que resulta conveniente volver a leer la consigna. Otra posible forma de resolución, es que busquen apoyarse en la percepción para resolver. En este caso, la maestra o el maestro podrá intervenir preguntando si alcanza con esa información para estar seguros sobre la igualdad de los segmentos. Resulta esperable que las niñas y los niños puedan tomar la medida del segmento MR pinchando el compás en uno de los extremos y abriendo el otro “brazo” del instrumento hasta llegar al extremo opuesto. Luego, sin cambiar la distancia entre los “brazos” del compás, se espera que trasladen esa medida para superponerla en cada uno de los segmentos que aparecen en la imagen.

En la **discusión colectiva,** al poner en común los diferentes procedimientos, se propone generar un debate sobre el uso del compás para comparar longitudes. También se podrá reflexionar sobre las condiciones presentes en el problema que hicieron posible el uso del compás. Por ejemplo, en este caso, lo que permite el uso de este instrumento es que no se busca saber cuánto mide la longitud del segmento MR, sino encontrar otros segmentos que tengan igual longitud que él y eso se resuelve por medio de la comparación.

2. Dibujá en tu carpeta una recta llamada **a**. Sobre ella, trazá un segmento que mida el triple que $\overline{EG}$.

En el problema 2, a diferencia del anterior, se propone hacer un dibujo en la carpeta trasladando repetidas veces la longitud del segmento EG. La presentación en hoja lisa que se utiliza en la actividad colabora para que las y los estudiantes dejen de apoyar su resolución en la grilla de la hoja cuadriculada.

Si bien no está indicado en el enunciado el uso del compás, al tratarse de problemas secuenciados, esta actividad propone retomar las ideas construidas en el problema anterior. Por lo tanto, resulta imprescindible que la o el docente continúe problematizando el uso del compás para trasladar longitudes. Justamente, para resolver, las y los estudiantes pueden, una vez dibujada la recta *a*, trasladar sobre ella el segmento EG usando la regla para medir su longitud. En ese caso, la o el docente puede intervenir diciendo, por ejemplo: *¿cómo podrían trasladar el segmento sin averiguar cuánto mide?* En caso que decidan hacer marquitas en la regla para trasladar la longitud sin averiguar la medida, podría preguntarles: *¿algo de la actividad anterior les servirá para trasladar este segmento?¿Cómo utilizarían el procedimiento que usaron en el problema 1 para resolver esta actividad?*

En el espacio de **discusión colectiva** será interesante analizar los diferentes procedimientos utilizados para trasladar la longitud del segmento. En este sentido se podrá analizar cómo hicieron para decidir dónde pinchar el compás cada vez, si les hizo falta volver a medir la longitud del segmento todas las veces que necesitaron trasladarlo, si alguno de los extremos del segmento no pertenecen a la recta *a* y por qué.

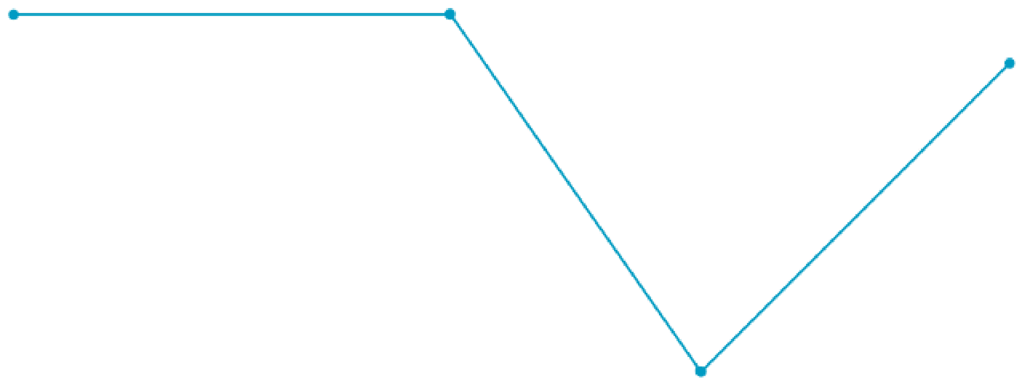
Ángulos: situaciones de copiado de figuras y el uso del transportador. Análisis de los problemas 1, 2, 3, 4 y 5 (páginas 67 a 71)

En este bloque de problemas se tiene la intención de construir junto a las y los estudiantes la noción de ángulo. Con respecto al transportador, tal como se mencionó en la introducción, proponemos que la precisión y la destreza en su uso estén al servicio de la resolución de problemas y de las conceptualizaciones geométricas.

El problema 1 invita a copiar segmentos consecutivos y para lograrlo se requiere tener en cuenta tanto la longitud de cada segmento como un nuevo aspecto de la figura: los ángulos que forman entre sí. Esta nueva tarea habilita un tipo de trabajo exploratorio donde no exige que las niñas y los niños utilicen el transportador como primera estrategia de resolución. A lo largo de la secuencia, es posible avanzar hacia la caracterización de los ángulos, que luego se irá utilizando para la construcción de otras figuras.

Ángulos

1. Copiá este dibujo en una hoja lisa.



a. Escribí en tu carpeta cómo realizaste el copiado, qué instrumentos utilizaste y en qué orden fuiste realizando cada paso.
b. Superponé ambas figuras para ver si quedaron iguales.
c. Conversá con tus compañeros/as sobre las producciones: ¿todos/as lograron copiar la figura correctamente? Si la respuesta es *no*, ¿cuáles pueden haber sido los errores?
d. Si tu figura no quedó igual al modelo, intentá copiarla nuevamente. Te damos algunas ideas que pueden ayudarte: uní dos varillas en un extremo, permitiendo que estas se abran y se cierren. También podés ayudarte plegando papeles de alguna manera que te sea útil para esta figura.

En esta situación es posible promover un primer momento de exploración tanto del dibujo como de los instrumentos geométricos para anticipar cuáles de ellos permiten realizar una copia de la figura dada. Por otro lado, la decisión de trabajar en hoja lisa implica poner en juego relaciones de la figura sin apelar a argumentos ligados a las propiedades que otorga la cuadrícula.

El propósito de que las niñas y los niños se enfrenten a estas situaciones, cuando no tienen disponibles conocimientos sobre ángulos, es provocar la necesidad de caracterizarlos. La toma de conciencia de cuánto se deben abrir o cerrar las varillas posibilita comenzar a trabajar la idea de ángulo como amplitud.

En la actividad se ofrece el uso de distintos instrumentos no convencionales formado por dos varillas articuladas, tiras de papel plegadas o dos tiras de cartón unidas con un ganchito mariposa. La o el docente podrá explicitar su uso como un recurso que de alguna manera permite aproximar la amplitud de sus ángulos.

En cuanto a las posibles estrategias, algunas niñas y algunos niños podrían utilizar la regla para trazar los segmentos (o podrían acudir al uso del compás) y ubicarlos de manera consecutiva considerando aproximadamente la amplitud entre ellos. Luego, al tener el modelo presente, podrían superponer la copia con el dibujo original e ir realizando correcciones sobre la marcha, muchas veces sin llegar a conceptualizar cuáles son las propiedades de la figura.

También sería posible que utilicen el compás para tomar la distancia entre los extremos de los segmentos que forman los dos ángulos de la figura[7].

Una primera validación de esta actividad se podría obtener de la superposición entre la figura original y la copia. **La intención es que esta validación avance en la caracterización de las propiedades que definen a dicha figura. En este caso, las medidas de los segmentos y la amplitud de los ángulos involucrados**.

En el debate colectivo se podrá discutir que conocer la longitud de los segmentos no alcanza para copiar la figura, dado que es necesario considerar —mediante algún instrumento— la abertura que forman los segmentos consecutivos. Para dicho objetivo, algunas intervenciones docentes pueden ser: *¿qué necesitamos conocer para copiar los segmentos consecutivos? ¿Cómo logramos obtener esa amplitud?¿Qué debemos tener en cuenta?*

Luego de este debate, se propone la lectura colectiva del texto presentado en la página 68 del *Libro Estudiar y Aprender en 6to* donde se define el concepto de ángulo como la amplitud entre dos segmentos.

Antes de comenzar con las actividades 2, 3, 4 y 5 recomendamos analizar junto a las niñas y los niños la estrategia de Gastón sobre el uso del transportador de la página 69 del libro mencionado.

[7] Se propone que la validación de esta estrategia sea mediante la superposición. Luego de trabajar con la construcción de triángulos se puede retomar por qué si copiamos los tres lados de un triángulo quedan determinados sus ángulos.

Escuelas En Foco

PARA TENER EN CUENTA

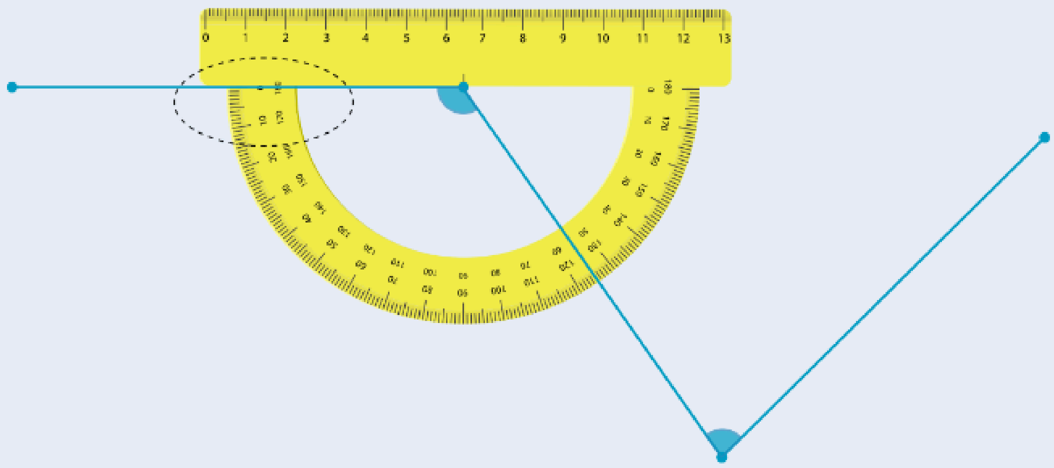
Gastón estaba intentando resolver la **actividad 1** de la **página 67** de la manera más prolija y fiel posible. Recordaba que, en años anteriores, había conocido un instrumento, el **transportador**, que nos ayuda a medir la amplitud en grados.

Repasó algunas recomendaciones para su uso:

- El vértice del ángulo debe coincidir con el punto que se encuentra marcado en el centro del transportador.
- El inicio de la graduación o 0 del transportador se hace coincidir con uno de los lados del ángulo.
- Observar en qué lugar de la graduación "cae" el otro lado del ángulo.

Los transportadores suelen tener dos sentidos de la graduación, para medir giros hacia un lado o hacia el otro.

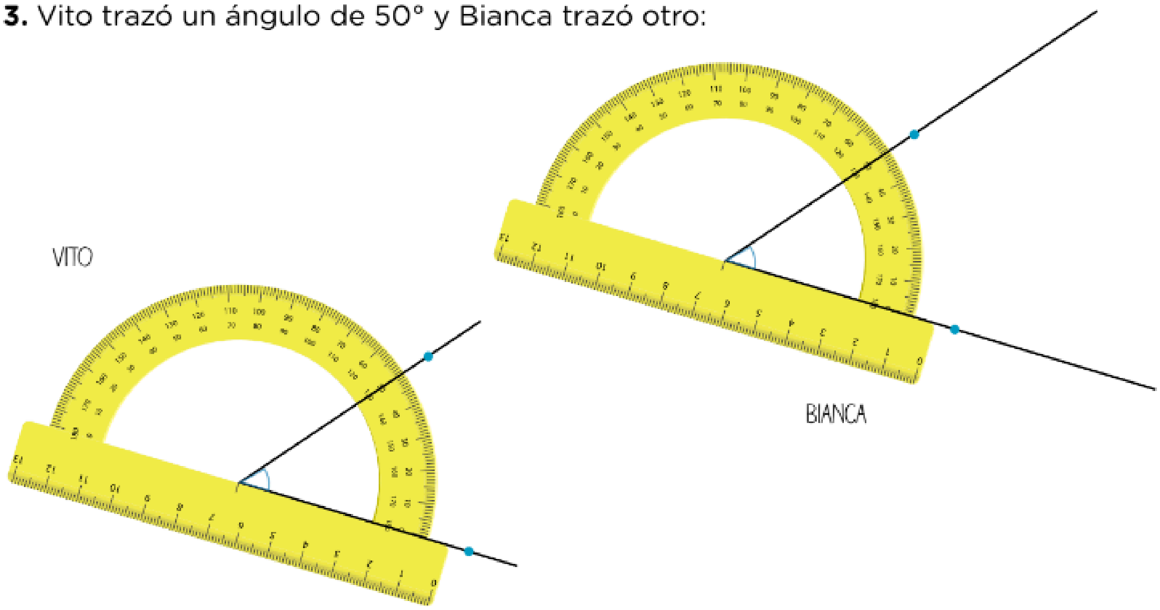
Con toda esta información, Gastón pudo saber que el ángulo mide 125°.



2. De a dos, utilizando la información de Gastón, midan el otro ángulo marcado en la figura y completen.

- El otro ángulo mide ....

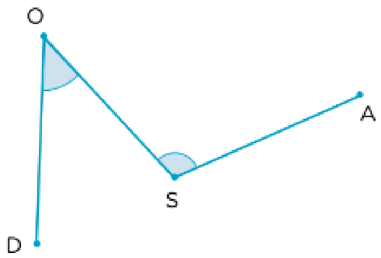
3. Vito trazó un ángulo de 50° y Bianca trazó otro:



Bianca asegura que su ángulo es más grande que el de Vito, y él sostiene que los ángulos en realidad son iguales, solo que ella "alargó las patitas".

a. Respondé en tu carpeta: ¿Con quién estás de acuerdo? Explicá por qué.

4. Medí los ángulos de esta figura.



- $\widehat{DOS}$ mide: ....
- $\widehat{OSA}$ mide: ....

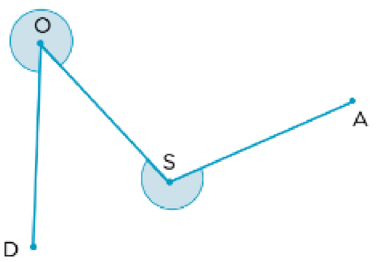
Escuelas En Foco

5. Para la actividad anterior, mediste los ángulos marcados. Pero también podríamos señalar los ángulos más amplios que un llano, que quedan determinados con los mismos dos lados. En la siguiente figura están marcados estos “ángulos de afuera”.

- ¿Cómo podríamos conocer la medida de cada uno de ellos? ¿Te sirven las respuestas de la actividad anterior para averiguarlo?

PARA TENER EN CUENTA

A los ángulos que miden entre 0° y 180° se los llama **convexos**. A los que miden más que 180° pero menos que 360° se les dice **cóncavos**.

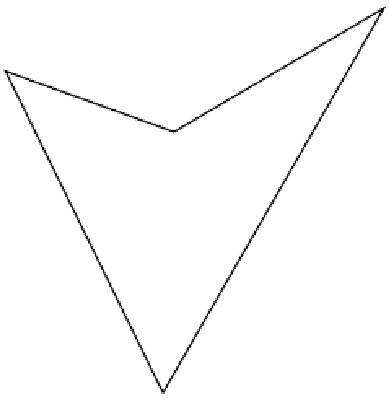


Mirando los ángulos señalados (cóncavos):

- $D\hat{O}S$ mide: ....
- $O\hat{S}A$ mide: ....

UN POCO MÁS DIFÍCIL

- Usando los útiles de geometría que consideres necesarios, copiá esta figura en una hoja lisa (¡no vale calcar!).



En este bloque de actividades se propone medir ángulos utilizando el transportador. Emplear este instrumento supone cierta complejidad, por esta razón se sugiere instalar en el aula el análisis de cómo utilizarlo. Una posible estrategia de control es que las niñas y los niños puedan anticipar, apoyados en el ángulo recto, si el que tienen que medir será mayor o menor a dicho ángulo.

El problema 3 tiene la intención de poner en discusión una concepción muy frecuente en las niñas y los niños que refiere a pensar que cuanto mayor es la longitud de los lados que determinan un ángulo, mayor es su amplitud.

Con respecto a la medición de ángulos mayores a 180º de la actividad 5 pueden surgir distintas estrategias tales como prolongar los segmentos involucrados y considerar a dichos ángulos como la suma entre un ángulo llano y un convexo o la diferencia entre el ángulo de 360º y el ángulo convexo “correspondiente”.

Construcciones usando el compás. Análisis de los problemas 1, 2, 3 y 4 (páginas 72 a 74)

Esta colección de problemas propone retomar las conclusiones elaboradas a partir de los problemas anteriores y hacerlas avanzar utilizándolas como herramienta para resolver nuevas situaciones. Se trata de propuestas en las que, a partir de analizar las condiciones que deben cumplir algunos puntos, se resignifica el uso del compás como *el* instrumento que permite conservar y garantizar que esas condiciones se encuentren presentes en el dibujo. El trabajo que realicen las y los estudiantes al abordar estas propuestas les permitirá seguir problematizando estas ideas para poder usarlas como herramientas al construir los triángulos del siguiente apartado.

Podemos decir, entonces, que este grupo de problemas oficia de puente entre las nociones que se venían construyendo y las que vendrán, convirtiéndose en un eslabón importante para sostener la progresión en la construcción de conocimiento sobre estos contenidos geométricos.

1. Los puntos A y B están a 5 cm de distancia entre sí. Para cada caso, dibujá todos los puntos que cumplan las condiciones pedidas.
   a. Que estén a 3 cm de distancia del punto A y a 4 cm del punto B, al mismo tiempo.

- ¿Cuántos puntos cumplen las dos condiciones? Rodeá la respuesta correcta.

Ninguno **1** **2** **3** **Muchos**

b. Que estén a 5 cm de A y a 5 cm de B, al mismo tiempo.

- ¿Cuántos puntos cumplen las dos condiciones? Rodeá la respuesta correcta.

Ninguno **1** **2** **3** **Muchos**

c. Que estén a 3 cm de A y a 2 cm de B, al mismo tiempo.

- ¿Cuántos puntos cumplen las dos condiciones? Rodeá la respuesta correcta.

  Ninguno 1 2 3 Muchos

d. Que estén a 2 cm de A y a 2 cm de B, al mismo tiempo.

- ¿Cuántos puntos cumplen las dos condiciones? Rodeá la respuesta correcta.

  Ninguno 1 2 3 Muchos

El problema 1 está compuesto por varios ítems. Cada uno propone encontrar puntos que cumplan con una nueva condición en la que se busca problematizar las relaciones entre dos circunferencias.

Para resolver estos problemas es esperable que las y los estudiantes recuperen lo estudiado en los apartados “Situaciones que involucran puntos y distancias: Circunferencia y círculo” y “Una vuelta de tuerca sobre las nociones de circunferencia y círculo”. Sin embargo, podría suceder que recurran nuevamente al uso de la regla para buscar esos puntos. Será necesario, entonces, que la o el docente intervenga evocando las conclusiones elaboradas a partir de esos apartados para que sus estudiantes puedan utilizarlas al resolver las actividades propuestas.

Una posible forma de gestionar esta secuencia de problemas es proponer la resolución de cada ítem e ir poniendo en común las respuestas. Esa decisión podría colaborar para que las ideas explicitadas por unas o unos sirvan al resto para resolver los problemas que siguen. En ese caso, resulta importante que la o el docente gestione esos intercambios de manera que las conclusiones que se elaboren no anticipen las respuestas de los siguientes problemas.

Otra decisión podría ser proponer a las y los estudiantes resolver todos los ítems y ofrecer un sólo espacio de discusión colectiva. En este caso, será necesario que durante el momento de resolución la o el docente recorra los diferentes grupos para identificar las y los estudiantes que no están pudiendo avanzar e intervenga en consecuencia.

En el ítem a), por ejemplo, podría suceder que algunas niñas y algunos niños dibujen un arco de la circunferencia y se detengan una vez encontrado un punto sin distinguir que de completar la circunferencia los puntos que componen la solución son dos. Será decisión de la o el docente intervenir en los pequeños grupos para reflexionar sobre la situación o si considera que se trata de un asunto a retomar en el espacio de discusión colectiva.

Como anticipamos, la relación que retoma cada ítem es diferente, al igual que la cantidad de respuestas posibles. Así, mientras que en los ítems a) y b) los puntos que conforman la respuesta son dos y se encuentran en la intersección entre ambas circunferencias, en el ítem c) sólo es uno y, en d) ninguno.

En el espacio de discusión colectiva resultará interesante analizar las diferentes relaciones entre las circunferencias y cómo esa relación influye en la cantidad de soluciones. **Esta reflexión colaborará para que la mayoría de las y los estudiantes logren evidenciar que la distancia entre los centros de las circunferencias y los radios influyen en la cantidad de puntos de intersección entre ambas circunferencias**.
Explicitar estas relaciones posibilita que más alumnas y alumnos puedan enfrentarse a la situación que se propone al final de esta secuencia en la sección *Un poco más difícil*.

UN POCO MÁS DIFÍCIL

- Sin realizar los dibujos, decidí si las siguientes circunferencias se cruzarán en uno, dos o ningún punto. Explicá cómo lo pensaste.
  A partir del segmento $\overline{AB}$ que mide 7 cm, se traza una circunferencia de centro A y 2 cm de radio y otra con centro B de 8 cm de diámetro.

En esta actividad se espera que las y los estudiantes puedan apelar a las conclusiones elaboradas de manera colectiva para anticipar la respuesta.

2. Dos puntos llamados F y G están a 4 cm de distancia entre sí. Dibujá o escribí en tu carpeta todo lo que necesites para responder las siguientes preguntas.
a. ¿Es posible encontrar algún punto que esté a 3 cm de F y de G al mismo tiempo? Si es así, ¿cuántos hay?
b. ¿Y que esté a 5 cm de F y G al mismo tiempo? Si es así, ¿cuántos hay?
c. ¿Y que esté a 2 cm de F y G al mismo tiempo? Si es así, ¿cuántos hay?
d. ¿Y que esté a 1 cm de F y G al mismo tiempo? Si es así, ¿cuántos hay?

El problema 2 retoma lo estudiado en la actividad anterior promoviendo que las y los estudiantes decidan el procedimiento de resolución. Aunque cada ítem pregunta sólo por la cantidad de respuestas posibles, resultará interesante que la o el docente pregunte sobre el procedimiento utilizado en cada caso y, además, traccione con sus intervenciones hacia una reflexión que permita evidenciar si es posible anticipar o no la respuesta sin necesidad de realizar la construcción. Algunas intervenciones que se podrían formular para retomar lo trabajado en el problema anterior son: *¿alcanza con saber cuánto miden los radios de ambas circunferencias para saber cuántos puntos cumplen con lo pedido? En caso de que no alcance, ¿qué otra cuestión hay que tener en cuenta?*

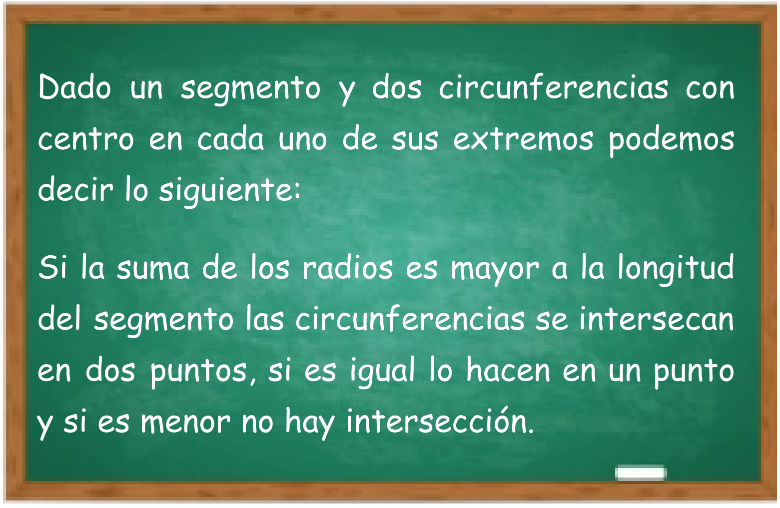
3. ¿A qué distancia deben estar dos puntos M y P para que haya un único punto que esté a 6 cm de cada uno de ellos?

....

....

El problema 3, en cambio, propone mirar la relación desde un punto de vista diferente. Ahora en el enunciado se brinda la información de la distancia entre un punto y los puntos M y P con la intención de analizar la distancia a la que se deberían encontrar los centros de ambas circunferencias.

Luego de este bloque de problemas se puede escribir de **manera provisoria** las conclusiones en un afiche.



Decimos de manera provisoria porque puede ocurrir lo mostrado en las imágenes 8 y 9 :

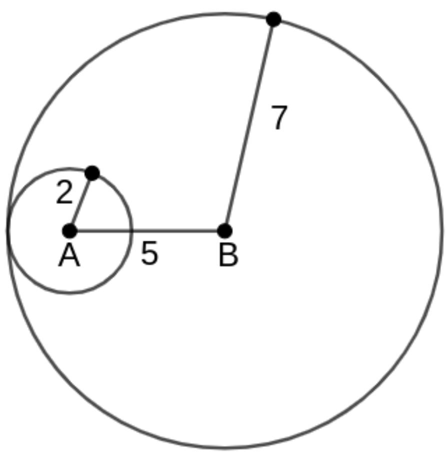
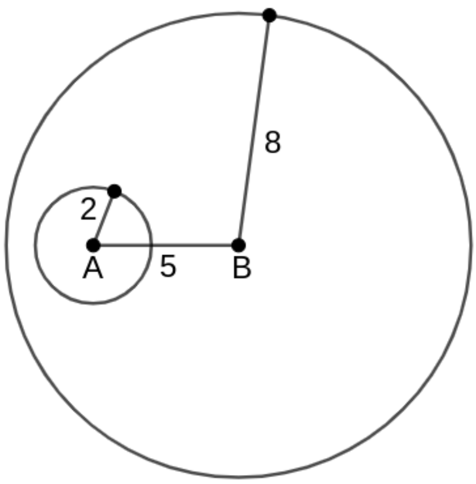
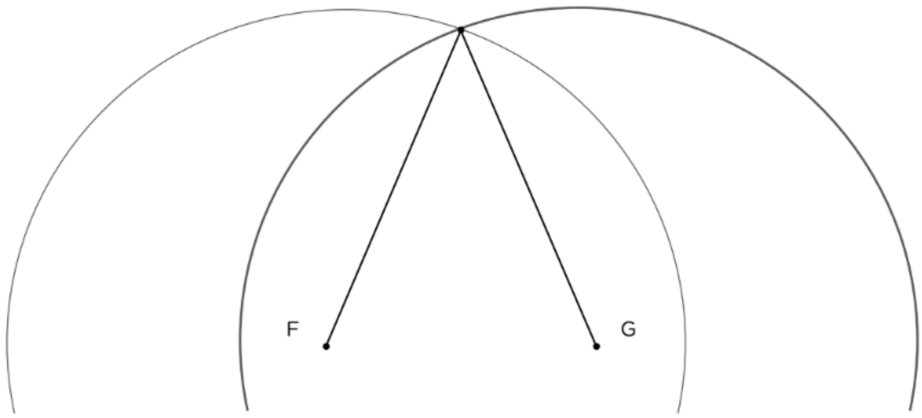
	

Imagen 8: La circunferencia de centro A tiene radio 2 y la de centro B tiene radio 7.	Imagen 8: La circunferencia de centro A tiene radio 2 y la de centro B tiene radio 8.

Si se pone en discusión lo dicho anteriormente por parte de las y los estudiantes planteando alguno de estos casos, se pueden ajustar las afirmaciones mencionadas. En este caso se tendrá que considerar la resta de los radios y relacionar el valor obtenido con la longitud del segmento AB.

4. Al resolver el **punto b.** de la **actividad 2**, Agustín trazó uno de los radios de cada circunferencia: aquellos que se forman entre los puntos centrales (F en un caso, G en el otro) y uno de los puntos en común. Al ver su hoja, se dio cuenta de que si unía los puntos F y G le quedaba formado un triángulo.



a. Uní los centros de las circunferencias sobre el dibujo de Agustín, para completar el triángulo.
b. Respondé en tu carpeta: ¿qué información podés dar acerca de cómo es el triángulo que quedó formado?

En el problema 4, se propone comenzar a reflexionar sobre los triángulos estableciendo un puente entre las ideas que se venían construyendo y las que se comienzan a desarrollar en los siguientes apartados. En este sentido, propone establecer una relación entre lo que se sabe “relaciones entre puntos”, “distancia entre los puntos de un circunferencia y su centro”, “relaciones entre circunferencias”, para que estos conocimientos puedan ser reutilizados al resolver nuevos problemas.

En el ítem a), por ejemplo, tiene el propósito de hacer evidente el triángulo que se puede construir a partir de ese dibujo. Esto permitirá que todas las niñas y todos los niños identifiquen la figura sobre la que se va a estar trabajando en el ítem b). Este último ítem, en cambio, promueve el análisis de la información aportada por el dibujo y el texto para poder responder. En este sentido, será preciso que la o el docente realice intervenciones que permitan a sus estudiantes vincular el dibujo de este problema con la información aportada en el texto del punto b del problema 2 al que hace referencia. Las niñas y los niños que no logren identificar esa información en el texto o que, al hacerlo no evidencien cómo ésta podría colaborar con la resolución, posiblemente recurran a medir los segmentos para determinar algunas características del triángulo. En ese caso será preciso que la o el docente intervenga promoviendo la reflexión sobre si es necesario medir o si la información brindada por el dibujo y el texto resultan suficientes para averiguar la medida de los lados. Dado que ambas circunferencias tienen el mismo radio, podemos garantizar que esos lados van a ser iguales sin necesidad de medir para asegurar que será un triángulo isósceles. Algunas de las intervenciones que podría realizar la o el docente en el momento de **discusión colectiva** podrían ser: ¿qué podemos saber del triángulo a partir del dato de las circunferencias? ¿Qué otra información aportada por el texto nos permite saber algo más de los lados del triángulo? ¿Por qué podemos asegurar que es isósceles? Para dar continuidad a esta reflexión, la maestra o el maestro podría proponer a sus estudiantes la resolución de situaciones similares donde los radios de las circunferencias no coincidan o coincidan con la distancia que hay entre ambos centros para seguir explorando la relación entre: los radios de las circunferencias, las distancias que hay entre sus centros y los diferentes tipos de triángulos que se pueden construir a partir de esa información.

Construcción de triángulos: Propiedad Triangular. Análisis de los problemas 1, 2, 3 y 4 (página 75)

La siguiente colección de problemas tiene el propósito de abordar el estudio de los triángulos a partir de la exploración de la relación que debe existir entre las longitudes de sus lados para que la construcción sea posible. Se trata de un conjunto de problemas en los que se espera que las niñas y los niños puedan reinvertir las ideas construidas al resolver los problemas de los apartados anteriores.

Escuelas En Foco

Construcción de triángulos

1. Usando regla y compás, construí en tu carpeta las siguientes figuras.

a. Un triángulo, de manera que uno de sus lados sea igual a este segmento, y los otros dos lados midan 2 cm y 5 cm, respectivamente.

b. Un triángulo que tenga dos de sus lados como estos segmentos:

c. Un triángulo que tenga los tres lados iguales, de 4 cm de longitud.

d. Un triángulo que tenga como lados los siguientes segmentos:

En el problema 1, si bien no se explícita la relación con lo que se venía estudiando sobre las circunferencias y su utilidad para construir triángulos, y sobre cómo el compás puede ser utilizado para trasladar medidas, se menciona el compás como uno de los instrumentos de geometría habilitados para la resolución. En este sentido, resulta esperable que algunas chicas y algunos chicos pasen por alto esa información y recurran directamente a la regla al momento de resolver. Será necesario, entonces, que la o el docente intervenga releyendo la consigna y preguntando a sus estudiantes por qué estará habilitado el compás y cómo podría servirles para pensar las construcciones.

Cada punto de esta actividad propone recorrer alguna de las diferentes formas en que podríamos combinar los lados de un triángulo. En todos los casos resultan posibles las construcciones y, en alguno, la cantidad de respuestas posibles no es única. Esto será retomado en el punto 2.

Resultará conveniente que la o el docente gestione el momento de discusión colectiva comparando procedimientos apoyados sólo en el uso de la regla con aquellos en los que se haya utilizado el compás. Será necesario, también, que promueva un intercambio en el que sus alumnas y alumnos logren vincular lo que ya saben con lo que están aprendiendo. Como resultado de esta tarea podrían escribirse afiches que sinteticen esas ideas para que puedan ser reutilizadas en nuevas oportunidades.

2. Luego de resolver la **actividad 1**, Thiago, Mariana y Camilo compararon sus construcciones superponiendo los triángulos que habían realizado. Todos cumplieron correctamente con las consignas. Sin embargo, en una de las construcciones, los triángulos no coincidían.

- ¿Cuál de los ítems de esa actividad puede dar lugar a diferentes soluciones? Explicá por qué en tu carpeta.

El problema 2 retoma lo realizado en la actividad anterior para profundizar el análisis de la cantidad de soluciones posibles. Propone recorrer las respuestas que las y los estudiantes plantearon en los distintos puntos del problema 1 para encontrar los casos en qué las construcciones no fueron únicas. En el momento de discusión colectiva será preciso que la o el docente traccione el intercambio hacia el análisis de la información aportada en cada uno de los puntos para poder explicitar la relación entre los datos aportados por el problema y su cantidad de respuestas.

3. Decidí en qué casos es posible construir un triángulo a partir de los datos dados. Para aquellos casos en los que no sea posible realizar la construcción, explicá en tu carpeta por qué.

a. Un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 3 cm y 4 cm.
b. Un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 3 cm y 4 cm.
c. Un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 2 cm.

El problema 3 aborda la exploración de la propiedad triangular[8]. Para ello se propone recorrer diferentes ternas de datos en las cuales a veces es posible realizar la construcción y otras no.

Aunque no se solicita realizar la construcción resulta esperable que las niñas y los niños recurran a ella para poder responder. Asimismo, si bien podrían decidir qué lado utilizar como “base” al momento de anticipar o realizar la construcción, el orden en que están presentados los datos promueve que el lado mayor sea el elegido. Esto permitirá que la construcción realizada se asemeje a lo trabajado en los problemas anteriores. Será necesario, entonces, que la maestra o el maestro observe qué estudiantes no están tomando ese segmento como “base”, porque posiblemente sea más difícil que se construya la propiedad en cuestión.

[8] Formalmente, esta propiedad se denomina “desigualdad triangular”.

En el momento de discusión colectiva se propone que la o el docente realice intervenciones que promuevan el análisis de las distintas situaciones retomando las explicaciones que las niñas y los niños dieron en los casos que no fue posible la construcción. También que traccione hacia la explicitación de la relación entre las longitudes de los lados para que las y los estudiantes puedan identificar la potencialidad de esa idea y cómo recurrir a ella podría permitirles anticipar si la construcción será posible o no. Resultará conveniente, entonces, que las conclusiones de este intercambio queden plasmadas en un cartel al que puedan recurrir al resolver nuevos problemas.

Luego, esa escritura colectiva podría compararse con la explicitada en el apartado “Para reflexionar entre todos y todas” de la página 76. Haber intercambiado sus ideas, construido colectivamente conclusiones y registrado esas ideas en un cartel podría permitirles aproximarse a la información que está en el recuadro con más herramientas disponibles para acompañar su interpretación.

Si elegimos dos lados de un triángulo y sumamos sus longitudes, el resultado siempre va a ser mayor que la medida del tercer lado, sea cual sea el par de lados que hayamos sumado. Esta característica de los triángulos recibe el nombre de **propiedad triangular**.

4. Proponé tres medidas de lados con los que no sea posible construir un triángulo, y otras tres que sí lo permitan.

....

El problema 4 retoma el estudio de la *propiedad triangular*, esta vez usada como herramienta de resolución. Es esperable que las niñas y los niños logren escribir las medidas solicitadas reinvirtiendo lo analizado en la actividad anterior. Sin embargo, es posible que algunas y algunos estudiantes necesiten de nuevas intervenciones que promuevan la reutilización de las conclusiones. Algunas intervenciones que podría realizar la o el docente podrían ser: *¿qué te está pidiendo la actividad? ¿Qué datos estás teniendo que escribir? ¿Habrá alguna condición entre las medidas de los lados para que la construcción sea posible? ¿Hay alguna información en el aula que podría ayudarte a anticipar estas respuestas? ¿Te ayudará el cartel que escribimos? ¿Qué de lo que escribimos en el cartel te servirá para resolver el problema?*

Para dar continuidad a este proceso de reinversión será conveniente que la o el docente proponga nuevas situaciones en las que las y los estudiantes tengan que seguir reflexionando sobre el uso de estas condiciones. Asimismo, resultará conveniente que en dicha selección se varíe tanto la tarea a realizar (identificar, anticipar, escribir, explicar, etc.) como la presentación de la actividad, para tratar de aproximar a las y los estudiantes de distintas maneras a este nuevo concepto matemático.

El trabajo con el programa GeoGebra

En la introducción hemos mencionado la riqueza didáctica que tiene la tarea de construir una figura. Al realizar una construcción geométrica mediante determinados instrumentos geométricos, se requiere considerar algunas de las relaciones que caracterizan al objeto geométrico en cuestión, así como identificar el modo de plasmar dichas relaciones en el dibujo.

Proponemos la inclusión del programa GeoGebra en la enseñanza de la geometría ya que se trata de un *software* que ha sido creado como una herramienta de enseñanza con una perspectiva que permite poner en primer plano la caracterización de las figuras a partir de las relaciones entre sus elementos. Para que un dibujo realizado en GeoGebra —que representa a cierto objeto teórico— mantenga invariante las propiedades involucradas, es necesario apelar a las herramientas que se vinculan con las relaciones que definen al objeto en cuestión.

Mediante dicho programa es posible explorar, conjeturar y analizar las propiedades de las figuras mediante el movimiento de sus representaciones. Cuando se quiere realizar una construcción, **no es suficiente con poner en juego visualmente una relación geométrica, sino que es necesario definirla a través de las herramientas del programa. Esta característica permite generar un espacio de trabajo que posibilita sostener, desde la propuesta de enseñanza, la centralidad de las propiedades de las figuras y de las relaciones geométricas involucradas**.

Versión GeoGebra del problema 1 (página 63)

Con la herramienta *Punto*, marcá un punto A en cualquier lugar de la pantalla. Trazá todos los puntos que encuentres que estén a 2 unidades de A. Luego, compará con dos compañeros/as sus producciones. ¿Todos/as marcaron los mismos puntos?

Si nunca han trabajado con GeoGebra se recomienda primero hacer un recorrido por la barra de herramientas y mostrar con cuáles vamos a trabajar. Otra opción es personalizar[9] las herramientas —ingresando a *Herramientas-Confección de barra personal*— y dejar habilitadas las que se muestran en el archivo de la imagen 1.

[9] En este tutorial se muestra cómo se puede personalizar la barra de herramientas y luego generar el enlace correspondiente al archivo.

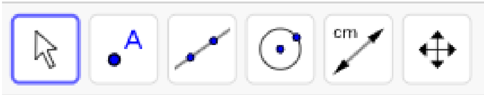


Imagen 1: Barra de herramientas personalizada. Al hacer clic sobre cada “caja” se abren más herramientas
[Archivo GeoGebra]

Asimismo, como la posibilidad de mover los objetos es la mayor potencialidad que posee el programa, se aconseja trazar un punto o un segmento y mostrar cómo se utiliza la herramienta *Mueve.*

Con respecto al problema, una posible estrategia es que las y los estudiantes usen la herramienta *Punto*, marquen “a ojo” un punto B a 2 unidades de A y luego con *Distancia o Longitud* lo ajusten hasta que se cumpla la condición pedida.

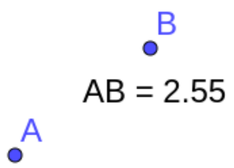
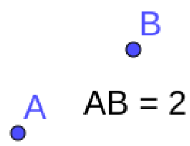
	

Imagen 2: Se marcó un punto B “a ojo”.	Imagen 3: Se movió el punto B hasta que la distancia entre dicho punto y A sea de 2 unidades.

Otra posibilidad es que utilicen la herramienta *Segmento de longitud dada* e ingresen 2 en la casilla de texto. Si utilizan este procedimiento una vez más, deberán arrastrar con la herramienta *Mueve* uno de los extremos del nuevo segmento para separarlo del anterior.

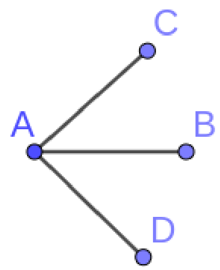


Imagen 4: Se trazaron tres segmentos con la herramienta *Segmento de longitud dada*.

Archivo GeoGebra

Las y los estudiantes deberán identificar que C, B y D son puntos que cumplen lo pedido. Una posible intervención docente es preguntar qué ocurre al mover los puntos B, C o D o directamente, **cómo es su movimiento**. Es decir, si se pueden mover por toda la pantalla o por una determinada trayectoria. Esta intervención puede dar pistas de que la circunferencia permite hallar todos los puntos a distancia 2 de A.

En el caso de que las niñas y los niños identifiquen que la circunferencia permite hallar todos los puntos equidistantes del centro, pueden utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y luego ajustar el radio para que mida 2 unidades. Una vez hecho esto, en determinadas ocasiones necesitan ver los puntos marcados para responder la consigna, tal como se muestra en la imagen 6.

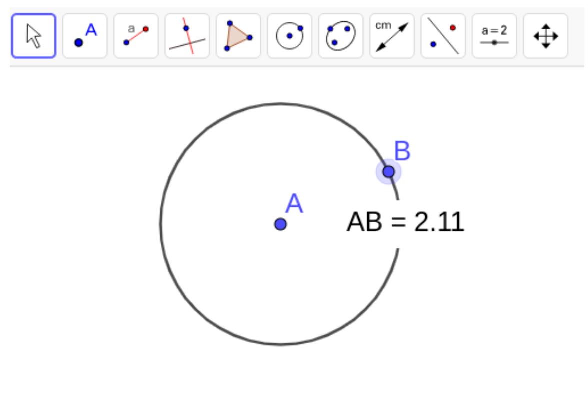
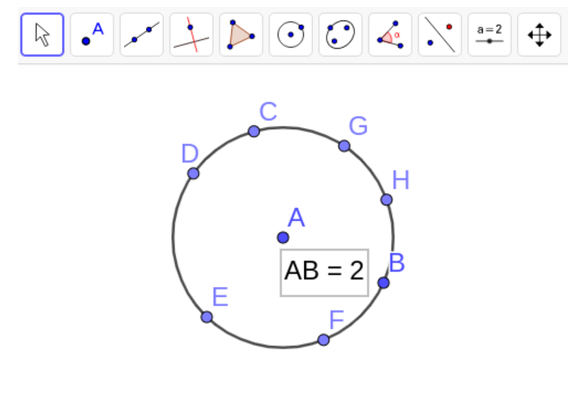
	

Imagen 5: La circunferencia se realizó con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*	Imagen 6: Se arrastró el punto B hasta que el radio sea de 2 unidades y luego se marcaron otros puntos pertenecientes a la circunferencia.

Por último, para garantizar que el radio sea de 2 unidades se puede utilizar la herramienta *Circunferencia: centro y radio* e ingresar 2 en la casilla de entrada.

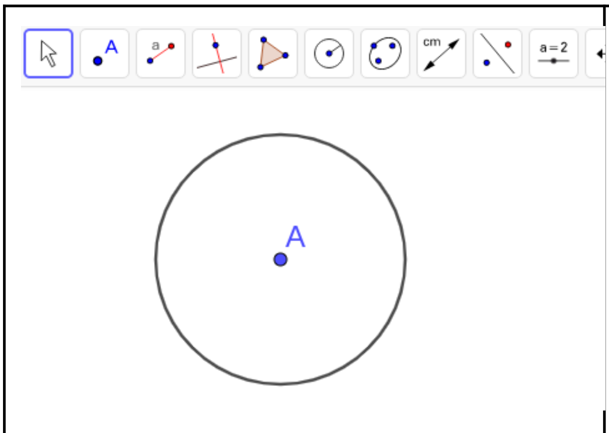
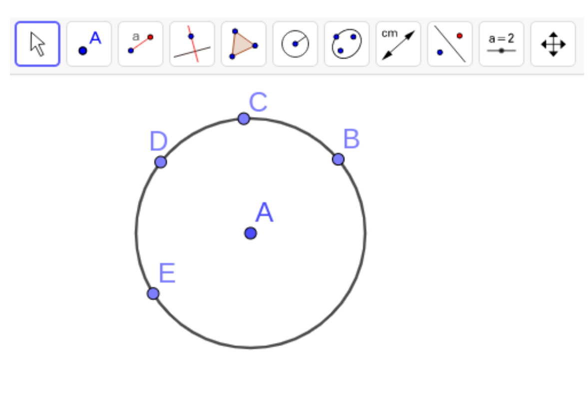
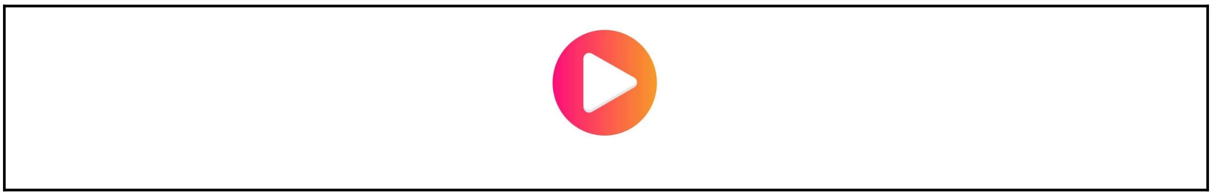
	

Imagen 7: Circunferencia trazada con la herramienta *Circunferencia centro y radio*.	Imagen 8: Se marcaron varios puntos sobre la circunferencia.



Como se muestra en el video de la imagen 7, también es posible desplazar los puntos B, C, D y E. Como dichos puntos fueron marcados sobre la circunferencia, se mueven sobre su trazo.

En el caso de haber trabajado con GeoGebra, se puede plantear la discusión sobre en cuáles estrategias los puntos marcados preservan la distancia de 2 unidades de A –y cuáles no– frente al movimiento. Por ejemplo, en la imagen 7 podemos notar que no es posible cambiar el radio de la circunferencia mientras que en la construcción de la imagen 5 sí es posible porque el radio está determinado por los puntos A y B y dichos puntos se pueden desplazar por toda la pantalla.

En la página 4 hemos mencionado que un asunto a discutir es la cantidad de puntos que están 2 cm de A. Allí mencionamos que una posible manera de argumentar que el trazo curvo contiene infinitos puntos es mediante la idea de que entre dos puntos que pertenecen a la circunferencia —por más cercanos que estén— siempre es posible marcar otro punto que también pertenece a la circunferencia. Esta cuestión se puede abordar con la herramienta *Aproximar.* Por ejemplo, se pueden marcar dos puntos cercanos que pertenezcan a la circunferencia y hacer *zoom* para mostrar que sigue quedando “espacio” para marcar otro. Y este procedimiento se puede repetir tantas veces como se quiera, tal como se muestra en el video de la imagen 9.

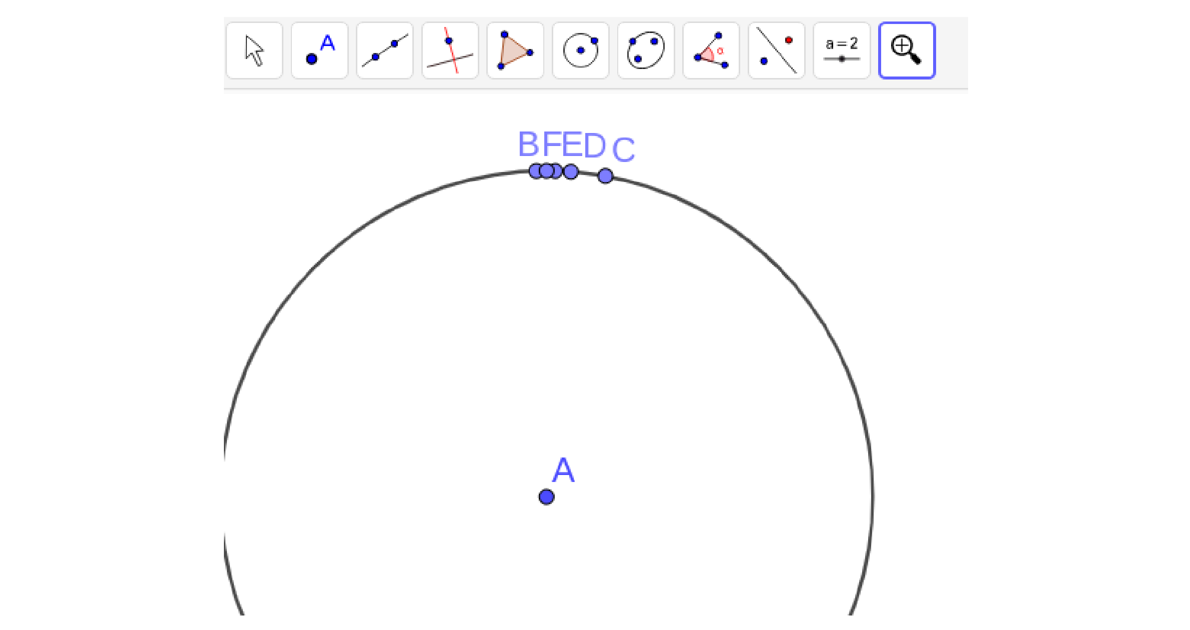


Imagen 9: Al hacer *zoom* se puede mostrar que entre dos puntos muy cercanos es posible marcar otro entre ellos.

Versión GeoGebra del problema 2 (página 66)

Ingresá al siguiente archivo[10]. Construí en otro lugar de la pantalla una recta y luego, con las herramientas disponibles, sobre ella trazá un segmento que mida el triple que AB.

Cuando el o la estudiante ingresa al archivo se encontrará con un segmento AB, tal como se muestra en la imagen 10.

[10] En el caso de no contar con wifi, se propone descargar el archivo con extensión .ggb e instalarlo en las computadoras de los y las estudiantes.

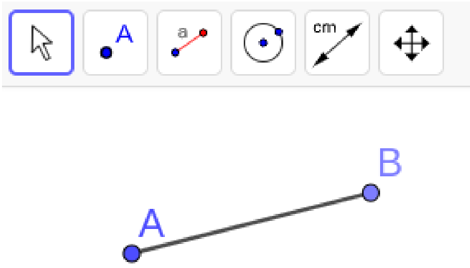


Imagen 10: Pantalla de inicio al abrir el archivo.

Cabe destacar dos variables didácticas que se tuvieron en cuenta al crear este archivo. Por un lado, los extremos del segmento son puntos móviles pero tienen distinto *comportamiento* al moverlos. Como fue construido de longitud 3, A se puede mover por toda la pantalla y B se mueve sobre una circunferencia de centro A y radio 3. En caso de querer complejizar la actividad el segmento original puede ser dado con dos extremos libres. Es decir, al poder moverse por toda la pantalla, el segmento no tiene una longitud determinada.

Por el otro, la barra de herramientas está personalizada para que las y los estudiantes se focalicen en los objetos geométricos que ya vienen trabajando en los problemas anteriores.

Con respecto a las posibles estrategias, puede ocurrir que primero las niñas y los niños midan el segmento AB con la herramienta *Distancia o Longitud* y obtengan la información que mide 3 unidades. Luego, una vez trazada la recta, una primera opción es que utilicen la herramienta *Segmento*, construyan un segmento “sobre ella” y finalmente con la herramienta *Mueve* lo ajusten para que mida 9 unidades.

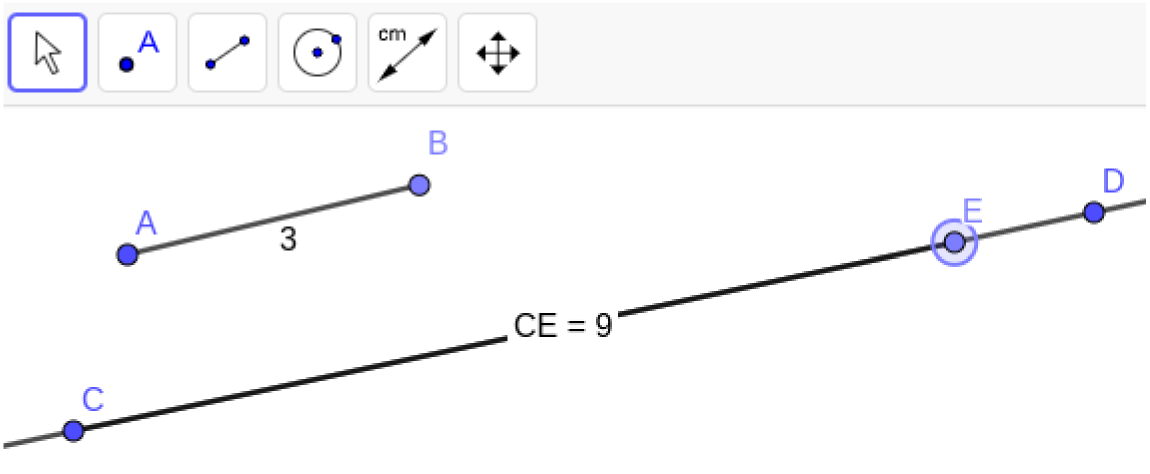


Imagen 11: Construcción de un segmento de longitud 9 mediante el arrastre del punto E.

[Archivo GeoGebra]

Otra alternativa es que utilicen la herramienta *Segmento de longitud dada* y tracen tres segmentos de 3 unidades con un extremo en la recta (o directamente uno de 9). Finalmente, pueden acomodar el otro extremo para que visualmente pertenezca a la recta (ver imagen 12).

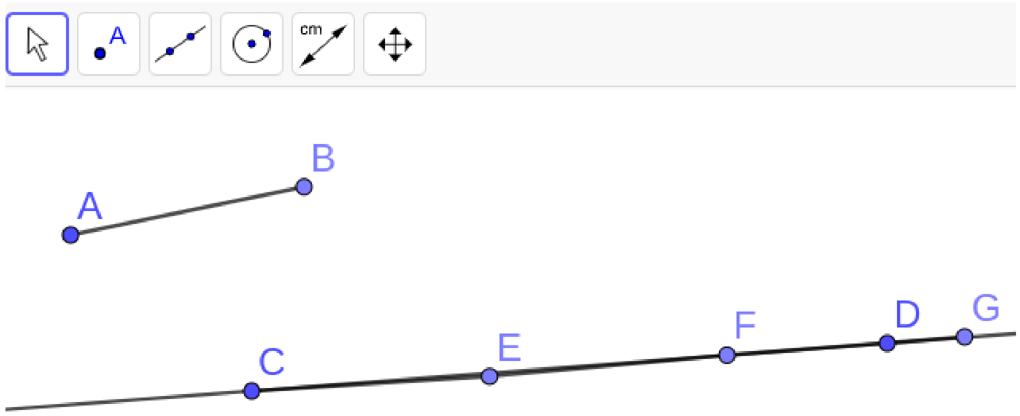


Imagen 12: Construcción del segmento pedido ($\overline{CG}$) mediante la herramienta *Segmento de longitud dada*.

[Archivo GeoGebra]

En el caso de no surgir la noción de circunferencia para trasladar medidas, la o el docente puede proponer que encuentren una estrategia utilizando alguna de las tres herramientas disponibles que se relacionan con la circunferencia.

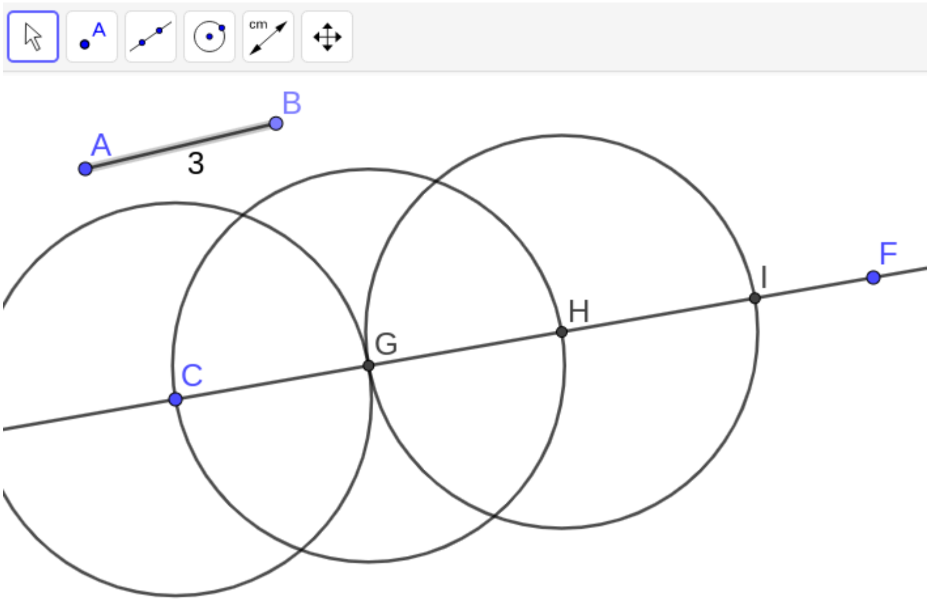


Imagen 13: Construcción del segmento CI mediante la herramienta *Compás*.

[Archivo GeoGebra]

Esta es una buena oportunidad para relacionar la herramienta *Compás* con el instrumento compás. En el caso de la herramienta, como se muestra en el video, **primero hay que seleccionar el segmento que determina el radio y luego elegir la ubicación del centro**.

En cuanto a la comparación de estrategias, una posible intervención docente es preguntar qué ocurre con cada construcción al arrastrar los puntos móviles. En los casos donde los puntos fueron ubicados “a ojo” o donde la longitud del segmento fue ajustada mediante el arrastre, la relación geométrica “el triple” se pierde. Sin embargo, rescatamos este tipo de construcciones porque hay conocimientos puestos en juego aunque se “desarmen” frente al movimiento.

En cambio, en los casos en los cuales se apeló a la noción de circunferencia esta relación se mantiene invariante.

Desde nuestro punto de vista, la condición de que una construcción mantenga invariante las relaciones geométricas frente al movimiento puede ser un

objeto de negociación y esa negociación es un proceso que abarca varias clases y se produce a partir del estudio de construcciones que no mantienen invariante todas las propiedades del objeto geométrico representado frente al movimiento.

Versión GeoGebra del problema 1 (ítem d): Construcción de triángulos (página 75)

Ingresá al siguiente archivo. Construí en otro lugar de la pantalla, si es posible, un triángulo que tenga como lados los segmentos dados.

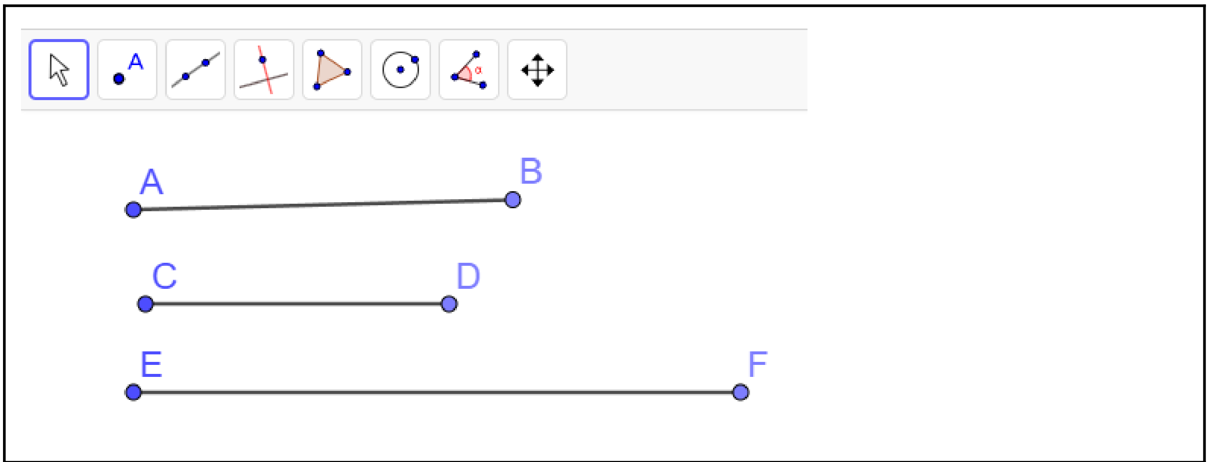


Imagen 14: Pantalla de inicio al abrir el archivo.

En esta actividad se tuvieron en cuenta distintas variables didácticas. Como se puede ver al ingresar al archivo, la barra de herramientas está personalizada para que los y las estudiantes no utilicen herramientas que no tengan que ver con la geometría o con los contenidos a enseñar. Además, se decidió fijar los puntos A, C y E para que sea necesario trasladar los segmentos y construir el triángulo en otro lugar de la pantalla. Por último, los lados del triángulo tienen medidas determinadas para que el trabajo esté más cercano al realizado en lápiz y papel. Esta tarea se puede complejizar brindando tres segmentos con extremos libres, es decir, cuya medida sea variable.

Con respecto a las posibles estrategias, es probable que las y los estudiantes midan los segmentos dados con la herramienta *Distancia,* luego tracen tres segmentos con dicha longitud y por último mediante el arrastre de los puntos ajusten los extremos para que el triángulo “cierre” (ver imagen 15).

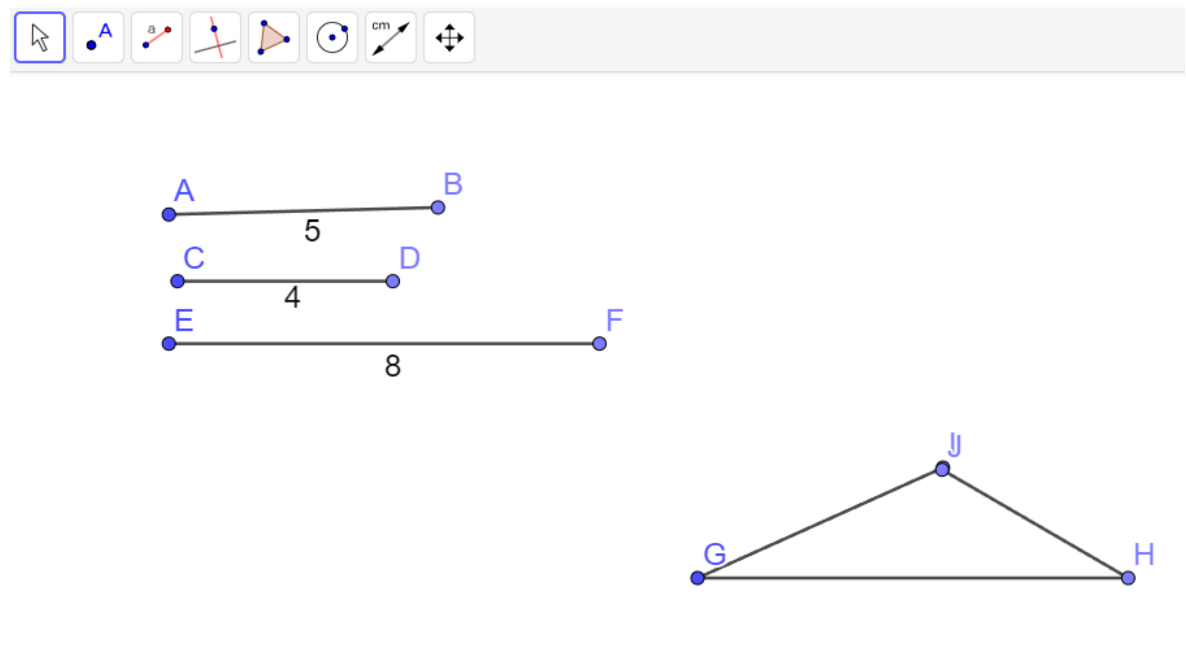


Imagen 15: Estrategia construyendo tres segmentos y ajustando los extremos para que el triángulo “cierre”.

[Archivo GeoGebra]

Frente a esa estrategia, una posible intervención docente puede ser: *¿cómo están seguros que los puntos I y J coinciden? Podemos verificarlo usando la herramienta Aproximar. Al utilizar el* zoom se puede ver que en realidad dichos puntos no estaban superpuestos, tal como se muestra en la imagen 16.

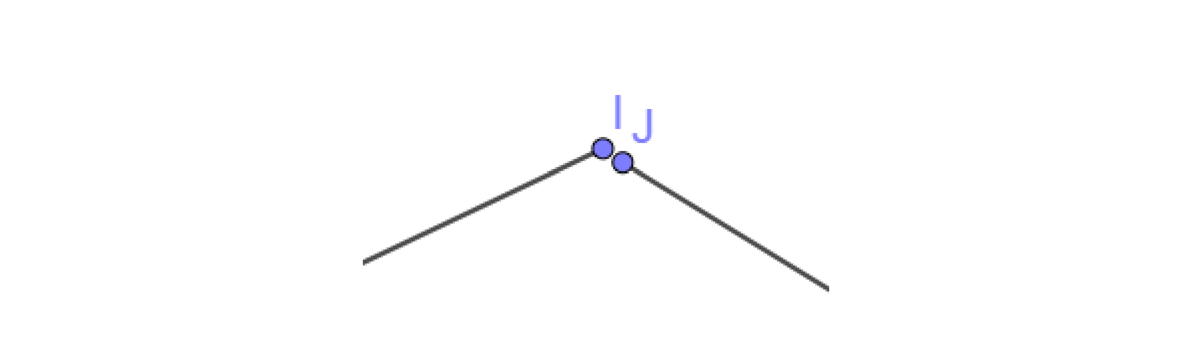


Imagen 16: Al hacer *zoom* se puede ver que en realidad I no coincidía con J.

Es probable que frente a esta intervención, las niñas y los niños nuevamente desplacen los puntos hasta que visualmente coincidan. Pero al utilizar otra vez el zoom los puntos se van a "despegar". Es aquí donde se las y los puede invitar a revisar en cuáles de los problemas anteriores se trabajó cómo se puede trasladar un segmento sin necesidad de usar la regla.

Otra estrategia posible es que construyan un triángulo cualquiera con la herramienta Polígono y luego ajusten los lados mediante el arrastre para que midan 4, 5 y 8 unidades (ver imagen 17).

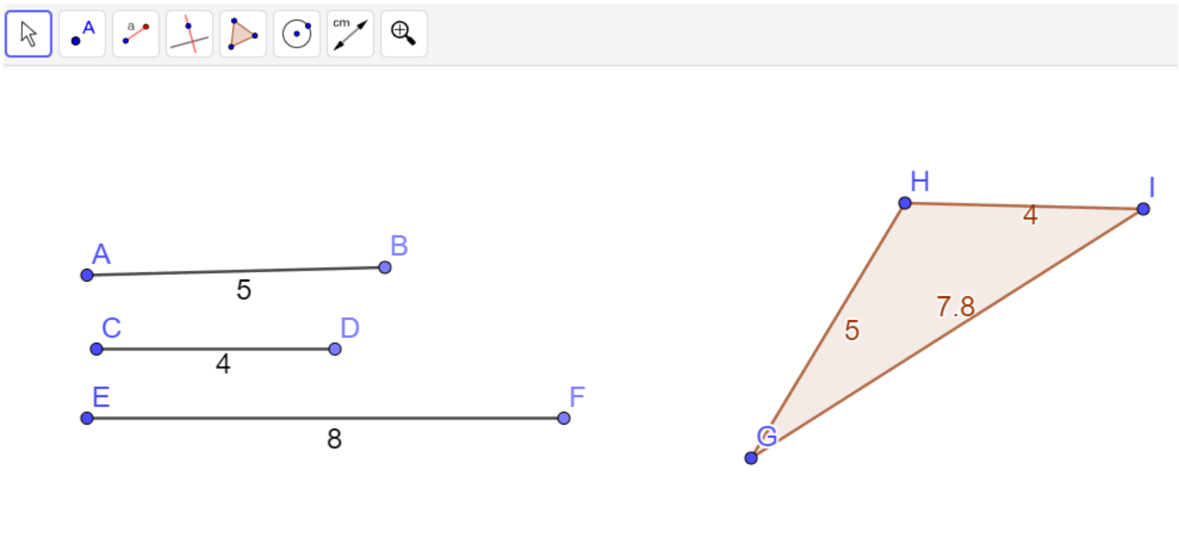


Imagen 17: Intento de construir un triángulo ajustando los lados mediante el arrastre

[Archivo GeoGebra]

Como se puede visualizar en el video de la imagen 17, resulta muy complejo lograr ajustar los lados para que midan 4, 5 y 8 unidades ya que, por ejemplo, fijado el lado de 5, se tienen que cumplir dos condiciones simultáneamente. Ante esta dificultad, nuevamente se puede proponer que revisen en sus carpetas cómo se puede trasladar un segmento sin necesidad de usar la regla.

Si algún grupo logra construir el triángulo mediante esta estrategia (ver imagen 18), en la discusión colectiva se puede comparar con las construcciones que hayan apelado a la noción de circunferencia.

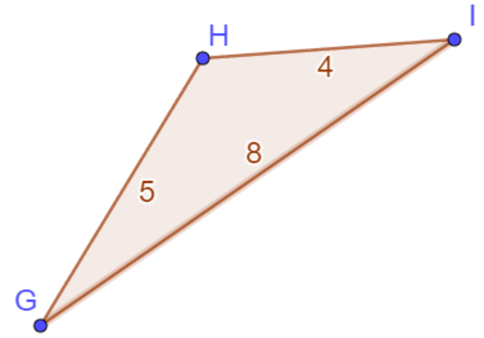


Imagen 18: Construcción del triángulo ajustando la medida de los lados mediante el arrastre.

Si las y los estudiantes identifican que la construcción puede realizarse mediante la noción de circunferencia, un camino posible es trazar un segmento de longitud 8 y luego utilizar la herramienta *Compás*, tal como se muestra en la imagen 19.

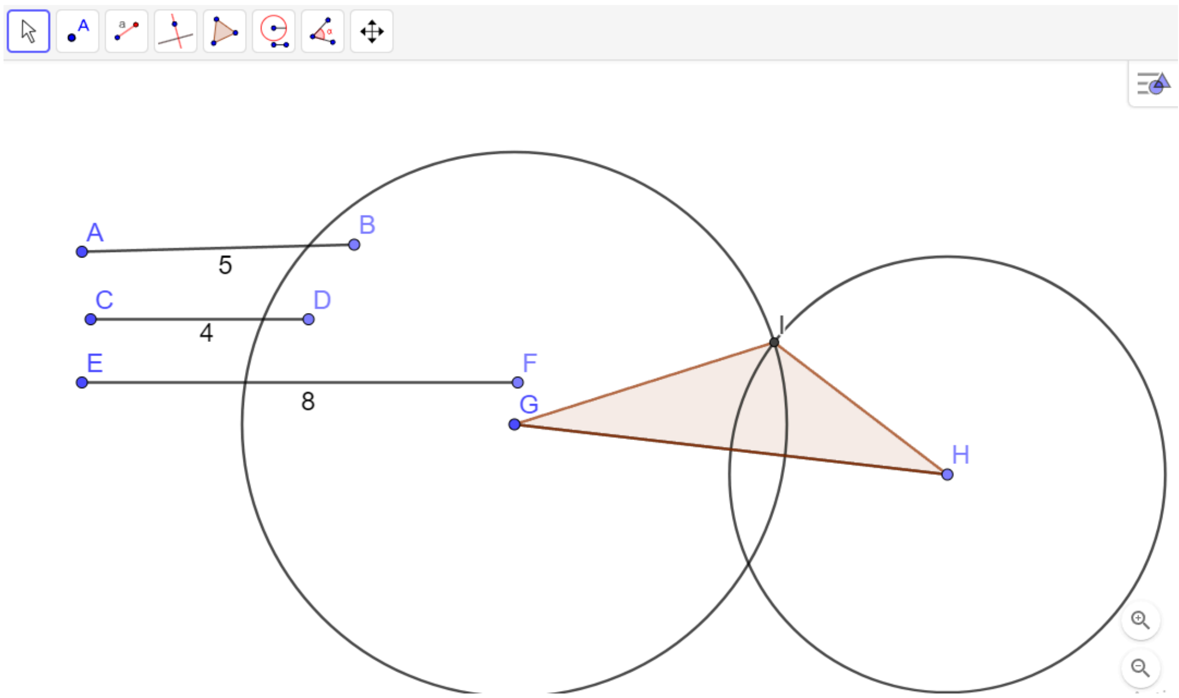


Imagen 18: Construcción del triángulo mediante la herramienta *Compás*.

Archivo GeoGebra

En lugar de la herramienta *Compás*, otra alternativa es utilizar la herramienta *Circunferencia: centro y radio* y luego ingresar en la casilla de texto las longitudes correspondientes.

En la discusión colectiva se espera poner en discusión las distintas estrategias que surgieron a la hora de resolver el problema. Podemos notar que en las construcciones donde se utilizó el arrastre para lograr un triángulo de lados 4,5 y 8 la **visualización tiene un rol preponderante**. Por ejemplo, en la estrategia de la imagen 15, se mueven los puntos hasta que “coincidan” o en resolución planteada en la imagen 18 se arrastran los puntos hasta lograr las longitudes dadas. En ambos casos, las relaciones geométricas no se pusieron en juego a través de las herramientas, es decir, no se las definieron al programa. Es por esta razón, que al mover determinados puntos, el triángulo deja de cumplir dichas relaciones.

Por el contrario, en la construcción de la imagen 18, al utilizar la herramienta *Compás* y luego definir el punto de intersección entre las circunferencias involucradas, se está poniendo en juego la noción de lugar geométrico. Es decir, en una circunferencia se encuentran todos los puntos que están a distancia 5 de G y en la otra los que están a distancia 4 de H. Por lo tanto, los dos puntos de intersección cumplen estar a 5 de G y a 4 de H simultáneamente. Es por esta razón que al mover cualquiera de los tres vértices, el triángulo sigue teniendo lados 4, 5 y 8.

Volvemos a remarcar que esta **diferencia entre ver y definir es un objeto de enseñanza y la intención es que se construya un recorrido donde para realizar una construcción, las niñas y los niños pongan en juego las relaciones geométricas de la figura en cuestión definiéndolas a través de las herramientas que brinda el programa prescindiendo de la visualización.**

Bibliografía

Duval, R; Godin, M. y Perrin-Glorian, M.J. (2004). Reproduction de figures à l'école élémentaire. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 7*, 5-89.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría.* El Zorzal.

Itzcovich, H., Arias, D., Grimaldi, V., Murúa, R., y Segal, S. (2022). El arrastre en un programa de geometría dinámica. Su dominio de validez como asunto de interacción entre estudiantes y docentes. *Revista De Educación Matemática*, *37*(1), 7–30. https://doi.org/10.33044/revem.37472

Itzcovich, H. y Murúa, R. (coords.). (2022). La enseñanza de la geometría: primeras experiencias con GeoGebra. Unipe Editorial Universitaria. Recuperado de: https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/herramientas/ense%C3%B1anza-de-la-geometr%C3%ADa-primeras-experiencias-con-geogebra-detail

Itzcovich, H., y Murúa, R. (2018). GeoGebra: «nuevas» preguntas sobre «viejas» tareas. *Yupana*, (10), 71–85. https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7698

Itzcovich H. y Murúa, R (2022). Primeros contactos de un grupo de docentes de escuela primaria con GeoGebra: tensiones entre conocimientos geométricos y el uso del programa. *Revista de Educación Matemática* (México) *34* (3), 329-351. https://doi.org/10.24844/EM3403.12

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14* (1.2), 165-210.

Murúa, R., Luna, J.P., Quiroga, A., Maciejowski, F. y Borsani, V. (2023). Geometría en Movimiento. Plan Nacional de Inclusión Digital Educativa. Conectar Igualdad. Disponible en:

https://recursos.conectarigualdad.edu.ar/publicaciones/158444

Murúa, R. y Becerril, M. (2021). *Transiciones entre primaria y secundaria:* circunferencia, círculo y triángulos. Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/157794/transiciones-circunferencia-circulo-y-triangulos-cuaderno-pa

Perrin-Glorian, M.J. y Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école, 222*, 26-36.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo n° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Recuperado de:

https://buenosaires.gob.ar/sites/default/files/media/document/2018/11/15/498f4110635ffbfaadf47e3b09ddd5d69d9b82b2.pdf

Sessa et al (2007). Aportes para la enseñanza. Matemática-Geometría. Ministerio de Educación, CABA. Recuperado de:

https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf