Matemática

4°

Formación General del Ciclo Orientado

Funciones exponenciales

Serie PROFUNDIZACIÓN · NES

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Horacio Rodríguez Larreta

Ministra de Educación e Innovación
María Soledad Acuña

Subsecretario de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología
Diego Javier Meiriño

Directora General de Planeamiento Educativo
María Constanza Ortiz

Subsecretario de Ciudad Inteligente y Tecnología Educativa
Santiago Andrés

Subsecretaria de Coordinación Pedagógica y Equidad Educativa
Andrea Fernanda Bruzos Bouchet

Subsecretario de Carrera Docente y Formación Técnica Profesional
Jorge Javier Tarulla

Subsecretario de Gestión Económico Financiera y Administración de Recursos
Sebastián Tomaghelli

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología (SSPECT)

Dirección General de Planeamiento Educativo (DGPLEDU)
Gerencia Operativa de Currículum (GOC)
Javier Simón

Equipo de generalistas de Nivel Secundario: Bettina Bregman (coordinación), Cecilia Bernardi, Ana Campelo, Cecilia García, Julieta Jakubowicz, Marta Libedinsky, Carolina Lifschitz, Julieta Santos

Especialistas: Ruth Schaposchnik (coordinación), Carla Cabalcabué, Rosa María Escayola, Inés Zuccarelli

Equipo Editorial de Materiales Digitales (DGPLEDU)
Coordinación general de Contenidos Digitales Silvia Saucedo
Colaboración y gestión de Contenidos Digitales: Manuela Luzzani Ovide

Edición y corrección: Bárbara Gomila
Corrección de estilo: Sebastián Vargas
Diseño gráfico y desarrollo digital: Ignacio Cismondi
Asistente editorial: Leticia Lobato

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

ISBN en trámite

Se autoriza la reproducción y difusión de este material para fines educativos u otros fines no comerciales, siempre que se especifique claramente la fuente.
Se prohíbe la reproducción de este material para reventa u otros fines comerciales.

Las denominaciones empleadas en este material y la forma en que aparecen presentados los datos que contiene no implican, de parte del Ministerio de Educación e Innovación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, juicio alguno sobre la condición jurídica o nivel de desarrollo de los países, territorios, ciudades o zonas, o de sus autoridades, ni respecto de la delimitación de sus fronteras o límites.

Fecha de consulta de imágenes, videos, textos y otros recursos digitales disponibles en Internet: 15 de diciembre de 2019.

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires / Ministerio de Educación e Innovación / Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.
Dirección General de Planeamiento Educativo / Gerencia Operativa de Lenguas en la Educación, 2019.
Holmberg 2548/96 2.° piso–C1430DOV–Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

© Copyright © 2019 Adobe Systems Software. Todos los derechos reservados.
Adobe, el logo de Adobe, Acrobat y el logo de Acrobat son marcas registradas de Adobe Systems Incorporated.

Presentación

La serie Profundización de la NES presenta distintas propuestas de enseñanza que ponen en juego los contenidos (conceptos, habilidades, capacidades, prácticas, valores y actitudes) definidos en el *Diseño Curricular* de la Formación General y la Formación Específica del Ciclo Orientado del Bachillerato de la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, en el marco de la Resolución N.° 321/MEGC/2015. Estos materiales despliegan, además, nuevas formas de organizar los espacios, los tiempos y las modalidades de enseñanza.

Las propuestas de esta serie se corresponden, por otra parte, con las características y las modalidades de trabajo pedagógico señaladas en el documento *Orientaciones para la Organización Pedagógica e Institucional de la Educación Obligatoria*, aprobado por la Resolución CFE N.° 93/09, que establece el propósito de fortalecer la organización y la propuesta educativa de las escuelas de nivel secundario de todo el país. A esta norma, actualmente vigente y retomada a nivel federal por la "Secundaria 2030", se agrega el documento *MOA – Marco de Organización de los Aprendizajes para la Educación Obligatoria Argentina*, aprobado por la Resolución CFE N.° 330/17, que plantea la necesidad de instalar distintos modos de apropiación de los saberes que den lugar a nuevas formas de enseñanza, de organización del trabajo docente y del uso de los recursos y los ambientes de aprendizaje. Se promueven también diversas modalidades de organización institucional, un uso flexible de los espacios y de los tiempos y nuevas formas de agrupamiento de las y los estudiantes, que se traduzcan en talleres, proyectos, articulación entre materias, experiencias formativas y debates, entre otras actividades, en las que participen estudiantes de diferentes años. En el ámbito de la Ciudad, el *Diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria* incorpora temáticas emergentes y abre la puerta para que en la escuela se traten problemáticas actuales de significatividad social y personal para la población joven.

Existe acuerdo sobre la magnitud de los cambios que demanda el nivel secundario para lograr incluir al conjunto de estudiantes, y promover los aprendizajes necesarios para el ejercicio de una ciudadanía responsable y la participación activa en ámbitos laborales y de formación. Si bien se ha recorrido un importante camino en este sentido, es indispensable profundizar, extender e incorporar propuestas que hagan de la escuela un lugar convocante y que ofrezcan, además, reales oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, siguen siendo desafíos:

- Planificar y ofrecer experiencias de aprendizaje en formatos diversos.
- Propiciar el trabajo compartido entre docentes de una o diferentes áreas, que promueva la integración de contenidos.
- Elaborar propuestas que incorporen oportunidades para el aprendizaje y el desarrollo de capacidades.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Los materiales desarrollados están destinados a docentes y presentan sugerencias, criterios y aportes para la planificación y el despliegue de las tareas de enseñanza y de evaluación. Se incluyen también ejemplos de actividades y experiencias de aprendizaje para estudiantes. Las secuencias han sido diseñadas para admitir un uso flexible y versátil de acuerdo con las diferentes realidades y situaciones institucionales. Pueden asumir distintas funciones dentro de una propuesta de enseñanza: explicar, narrar, ilustrar, desarrollar, interrogar, ampliar y sistematizar los contenidos; así como ofrecer una primera aproximación a una temática, formular dudas e interrogantes, plantear un esquema conceptual a partir del cual profundizar, proponer actividades de exploración e indagación, facilitar oportunidades de revisión, contribuir a la integración y a la comprensión, habilitar instancias de aplicación en contextos novedosos e invitar a imaginar nuevos escenarios y desafíos. Esto supone que, en algunos casos, se podrá adoptar la secuencia completa, y, en otros, seleccionar las partes que se consideren más convenientes. Asimismo, se podrá plantear un trabajo de mayor articulación o exigencia de acuerdos entre docentes, puesto que serán los equipos de profesores y profesoras quienes elaborarán propuestas didácticas en las que el uso de estos materiales cobre sentido.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

En esta ocasión se presentan secuencias didácticas destinadas al Ciclo Orientado de la NES, que comprende la formación general y la formación específica que responde a cada una de las orientaciones adoptadas por la Ciudad. En continuidad con lo iniciado en el Ciclo Básico, la formación general se destina al conjunto de estudiantes, con independencia de cada orientación, y procura consolidar los saberes generales y conocimientos vinculados al ejercicio responsable, crítico e informado de la ciudadanía y al desarrollo integral de las personas. La formación específica, por su parte, comprende unidades diversificadas, como introducción progresiva a un campo de conocimientos y de prácticas específico para cada orientación. El valor de la apropiación de este tipo de conocimientos reside no solo en la aproximación a conceptos y principios propios de un campo del saber, sino también en el desarrollo de hábitos de pensamiento riguroso y formas de indagación y análisis aplicables a diversos contextos y situaciones.

Para cada orientación, la formación específica presenta los contenidos organizados en bloques y ejes. Los bloques constituyen un modo de sistematizar, organizar y agrupar los contenidos, que, a su vez, se recuperan y especifican en cada uno de los ejes. Las propuestas didácticas de esta serie abordan contenidos de uno o más bloques, e indican cuál de las alternativas curriculares propuestas en el diseño curricular vigente y definida institucionalmente resulta más apropiada para su desarrollo.

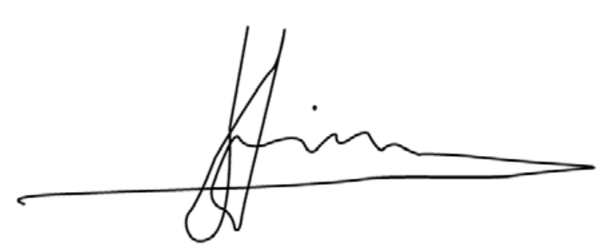
Los materiales presentados para el Ciclo Orientado dan continuidad a las secuencias didácticas desarrolladas para el Ciclo Básico. El lugar otorgado al abordaje de problemas complejos procura contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y de la argumentación desde perspectivas provenientes de distintas disciplinas. Se trata de propuestas alineadas con la formación de actores sociales conscientes de que las conductas colectivas e individuales tienen efectos en un mundo interdependiente. El énfasis puesto en el aprendizaje de capacidades responde a la necesidad de brindar experiencias y herramientas que permitan comprender, dar sentido y hacer uso de la gran cantidad de información que, a diferencia de otras épocas, está disponible y es fácilmente accesible para todas las personas. Las capacidades constituyen un tipo de contenidos que debe ser objeto de enseñanza sistemática. Para ello, la escuela tiene que ofrecer múltiples y variadas oportunidades, de manera que las y los estudiantes las desarrollen y consoliden.

En esta serie de materiales también se retoman y profundizan estrategias de aprendizaje planteadas para el Ciclo Básico y se avanza en la propuesta de otras nuevas, que respondan a las características del Ciclo Orientado y de cada campo de conocimiento: instancias de investigación y de producción, desarrollo de argumentaciones fundamentadas, trabajo con fuentes diversas, elaboración de producciones de sistematización de lo realizado, lectura de textos de mayor complejidad, entre otras. Su abordaje requiere una mayor autonomía, así como la posibilidad de comprometerse en la toma de decisiones, pensar cursos de acción, diseñar y desarrollar proyectos.

Las secuencias involucran diversos niveles de acompañamiento e instancias de reflexión sobre el propio aprendizaje, a fin de habilitar y favorecer distintas modalidades de acceso a los saberes y los conocimientos y una mayor inclusión.

Continuamos el recorrido iniciado y confiamos en que constituirá un aporte para el trabajo cotidiano. Como toda serie en construcción, seguirá incorporando y poniendo a disposición de las escuelas de la Ciudad nuevas propuestas, que darán lugar a nuevas experiencias y aprendizajes.

María Constanza Ortiz
Directora General de Planeamiento Educativo



Javier Simón
Gerente Operativo de Currículum

¿Cómo se navegan los textos de esta serie?

Los materiales de la serie Profundización de la NES cuentan con elementos interactivos que permiten la lectura hipertextual y optimizan la navegación.

Adobe Reader Copyright © 2019.
Todos los derechos reservados.

Para visualizar correctamente la interactividad se sugiere bajar el programa Adobe Acrobat Reader que constituye el estándar gratuito para ver e imprimir documentos PDF.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Pie de página

Volver a vista anterior — Al cliquear regresa a la última página vista.

Ícono que permite imprimir.

« 5 » — Folio, con flechas interactivas que llevan a la página anterior y a la página posterior.

Índice interactivo

Introducción

Plaquetas que indican los apartados principales de la propuesta.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Experimentos de laboratorio

Estudiar problemas contextualizados que permitan introducir la caracterización del crecimiento exponencial.

Organizador interactivo que presenta la secuencia completa de actividades.

Notas al final

1 Símbolo que indica una nota. Al cliquear se direcciona al listado final de notas.

Notas

1 Ejemplo de nota al final.

Actividades

Actividad 1 **Experimentos de laboratorio**

En un laboratorio se analiza el crecimiento de un tipo de bacterias, tomando mediciones una vez por hora. Las bacterias se reproducen por bipartición: cada bacteria se duplica en cada hora que transcurre desde comenzada la medición.

Íconos y enlaces

El color azul y el subrayado indican un vínculo a un sitio/página web o a una actividad o anexo interno del documento.

Indica apartados con orientaciones para la evaluación.

Índice interactivo

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Introducción

La siguiente secuencia está pensada para introducir a las/los estudiantes en el trabajo con las funciones exponenciales. A la hora de resolverla, se espera que hayan trabajado previamente con distintos tipos de funciones, con la lectura y la construcción de gráficos cartesianos, con la producción y el análisis de fórmulas, con el análisis de dominio e imagen, con intervalos de crecimiento y positividad, etc. Algunos de los problemas que se presentan involucran el análisis de procesos de crecimiento descritos a partir de porcentajes. En estos casos, la/el docente podrá realizar intervenciones para recuperar los conocimientos relacionados con este tema. Además, en la resolución de los problemas, se podrán recuperar algunas propiedades de la potenciación que les permitan a las/los estudiantes trabajar con exponentes negativos y/o racionales.

A lo largo de esta secuencia, se proponen diferentes situaciones con la intención de promover el estudio y análisis de procesos que involucran crecimientos exponenciales. A su vez, se pretende caracterizar estos procesos a partir de algunas de sus propiedades.

En la primera parte, se estudian problemas en diferentes contextos extramatemáticos relacionados con experimentos de laboratorio. Se comienza a caracterizar la variación exponencial a partir de la modelización de situaciones en las que se trabaja progresivamente con distintos aspectos de la misma: contextos discretos y continuos, variaciones crecientes y decrecientes, crecimiento porcentual, tablas y fórmulas. Como síntesis de esta actividad se definen las funciones exponenciales como aquellas del tipo $f(x)=k \cdot a^x$, determinando los posibles valores de a y de k, así como también el dominio e imagen de este tipo de funciones.

En la segunda parte, se presentan problemas descontextualizados en los que se profundiza el estudio de este tipo de funciones, con dominio en el conjunto de los números reales. Se introducen los gráficos cartesianos, su producción y su análisis, así como también las relaciones entre gráficos, tablas y fórmulas.

A modo orientativo, se muestran estrategias que se podrían desplegar en relación con las actividades que se proponen y algunas posibles intervenciones para docentes. Es importante aclarar que no se espera que, necesariamente, las/los estudiantes encuentren en un primer intento las estrategias para resolver correctamente las actividades, ni que expresen las relaciones en los términos descritos en este documento. En este sentido, sobre la base de los intentos de las/los estudiantes

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

y de los intercambios colectivos, el/la docente puede enseñar —mostrar y explicar— una estrategia posible para poner en juego y luego dar la oportunidad de que la reutilicen, la desarrollen, la transformen para otros casos. Es decir, se resalta la necesidad y el valor central de las explicaciones del docente en diferentes momentos de la tarea.

Las actividades presentadas en este documento tienen la intención de involucrar a las/los estudiantes en una actividad de producción matemática. Esto es, se busca que puedan ensayar, equivocarse, desarrollar diferentes resoluciones, analizar estrategias desplegadas por sus compañeros/as y tomar una posición argumentada frente a ellas. Este tipo de trabajo matemático resulta enriquecedor, pero también complejo, por lo que no se espera que se logre de un día para el otro ni en el transcurso de una única secuencia.

Por otro lado, desde el enfoque didáctico que sostiene esta propuesta, se entiende que los enunciados presentan una complejidad particular, en tanto aluden a situaciones problemáticas nuevas para las/los estudiantes. En este sentido, se espera que dichos enunciados puedan ser discutidos y consensuados en el colectivo de la clase, junto con el/la docente a cargo. De este modo, el enunciado final resultará producto de dicho intercambio.

En este material se incluye un recorrido posible, pero no único. En función de las particularidades del grupo con el que se trabaje, las/los docentes pueden agregar problemas similares intercalados, modificar las actividades o recortarlas según lo consideren necesario.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Contenidos, objetivos de aprendizaje y capacidades

Ejes/Contenidos	Objetivos de aprendizaje	Capacidades
Funciones y álgebra *Funciones exponenciales* • Problemas que involucren el estudio de procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial, discretos y continuos. • La función exponencial: gráficos y fórmulas. • Variación del gráfico a partir de la variación de la fórmula y viceversa. • Estudio de funciones exponenciales: positividad, negatividad, crecimiento, decrecimiento, en el contexto de los problemas que modelizan.	• Modelizar y resolver situaciones problemáticas extra e intramatemáticas que involucran funciones exponenciales. • Comprender las características de comportamiento gráfico y crecimiento de las funciones exponenciales.	• Resolución de problemas.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Itinerario de actividades

Actividad 1

Experimentos de laboratorio

Estudiar problemas contextualizados que permitan introducir la caracterización del crecimiento exponencial.

Actividad 2

Estudio de la función exponencial

Estudiar problemas descontextualizados de funciones exponenciales, poniendo énfasis en los distintos registros de representación —gráficos, tablas, fórmulas— y las relaciones entre ellos.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Orientaciones didácticas y actividades

A continuación, se presentan las actividades sugeridas para el grupo de estudiantes, acompañadas de orientaciones didácticas para docentes. En cuanto a la implementación de esta propuesta, se puede trabajar en parejas o en pequeños grupos. Este tipo de resolución enriquece el proceso de aprendizaje, ya que promueve interacciones entre pares en las que se hace necesario explicitar y validar las decisiones tomadas. Además, en los momentos que se considere necesario, se podrá intervenir para desarrollar una discusión colectiva.

Actividad 1. Experimentos de laboratorio

En esta actividad se estudian problemas en contexto con el propósito de comenzar a caracterizar el crecimiento exponencial.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Actividad 1 Experimentos de laboratorio

Problema 1

En un laboratorio se analiza el crecimiento de un tipo de bacterias, tomando mediciones una vez por hora. Las bacterias se reproducen por bipartición: cada bacteria se duplica en cada hora que transcurre desde comenzada la medición.

a. Completen la siguiente tabla que muestra la cantidad de bacterias en función del tiempo transcurrido desde el inicio del conteo.

Tiempo transcurrido (en horas)	0	1	2	3		10		15
Cantidad de bacterias	1	2						

b. Escriban un cálculo que les permita averiguar la cantidad de bacterias luego de transcurridas 20 horas de iniciada la experiencia.

c. Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad *B* de bacterias en función del tiempo *t* medido en horas, suponiendo que se siguen reproduciendo al mismo ritmo.

Problema 2

Un grupo de estudiantes analiza el crecimiento de la masa de una sustancia, de la que se sabe que crece de manera exponencial. Los datos que registraron en una tabla son los siguientes:

Tiempo transcurrido (en horas)	0	1	2	5
Masa (en gramos)	25	75	225	6075

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

a. ¿Cuál era la masa al comenzar la experiencia?

b. Si la masa de la sustancia siguió creciendo del mismo modo, ¿cuál era la masa luego de 10 horas de comenzada la experiencia? ¿Y luego de 7 horas y media de comenzada la experiencia?

c. Escriban una fórmula que permita calcular la masa de la sustancia *M* (en gramos) en función del tiempo transcurrido *t* (en horas) a partir de iniciada la experiencia.

Problema 3

Una sustancia sometida a una fuente de calor constante aumenta en un 25% su masa en cada minuto transcurrido, durante la primera media hora.

a. Completen la siguiente tabla que relaciona la masa de la sustancia *M* (en gramos) en función del tiempo transcurrido *t* (en minutos). Expliquen qué cálculos hicieron para completarla.

Tiempo transcurrido (en horas)	0	1	2	3	4	5	6
Masa de la sustancia (en gramos)	200	250					

b. Analicen cada una de las siguientes afirmaciones e indiquen si la consideran verdadera o falsa. Expliquen las conclusiones obtenidas.

- La masa de la sustancia para $t = 8$ es un 50% mayor que la masa de la sustancia para $t = 6$.
- Para calcular la masa de la sustancia en $t = 6$, se puede multiplicar por 1,25 la masa de la sustancia obtenida en $t = 5$.
- En cada minuto que transcurre, la masa de la sustancia se multiplica por 1,25.

c. Escriban una cuenta que les permita calcular la masa de la sustancia en $t = 15$ minutos.

d. Decidan cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular la masa de la sustancia *M* (en gramos) en función del tiempo transcurrido *t* (en minutos) a partir de iniciada la experiencia.

$M(t) = 200 \cdot 1{,}25^t$ $\qquad$ $M(t) = 0{,}25t + 200$ $\qquad$ $M(t) = 200 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)^t$

$M(t) = 200 + 200 \cdot 0{,}25^t$ $\qquad$ $M(t) = 200 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^t$ $\qquad$ $M(t) = 200 + 1{,}25t$

e. Calculen la masa de la sustancia para $t = 18{,}5$ minutos.

Problema 4

A un paciente se le administran 5 mg de un medicamento y se analiza la evolución del mismo en muestras de sangre que se toman cada hora. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye un 10% cada hora.

a. Completen la tabla que relaciona la cantidad de miligramos del medicamento en la sangre del paciente en función del tiempo transcurrido en horas.

Tiempo transcurrido (en horas)	0	1	2	3			10
Medicamento en sangre (en miligramos)							

b. Escriban una fórmula de la función que represente la cantidad del medicamento restante —medida en miligramos— en el torrente sanguíneo en relación con el tiempo transcurrido medido en horas.

c. ¿Es posible anticipar si en algún momento el paciente dejará de tener presencia de medicamento en sangre?

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Comentarios didácticos del Problema 1

En el Problema 1 se empieza a caracterizar el crecimiento exponencial a partir de una situación en la que se propone completar una tabla, en un contexto en el que las variables son discretas. Los primeros valores propuestos tienen la intención de que las/los estudiantes comiencen a interpretar el problema. Para el caso de $t = 10$ y $t = 15$, es posible que algunos/as expresen el resultado a partir de multiplicaciones sucesivas y otros/as, a partir de los cálculos 2^{10} y 2^{15}.

La consigna **b.** propone encontrar un procedimiento para t = 20 que pueda ser generalizado para cualquier otro valor. Se espera que esto funcione como soporte para la construcción de la fórmula.

Es posible que se trate de la primera oportunidad en la que las/los estudiantes deban producir una fórmula donde la variable se encuentra en el exponente. En este sentido, es probable que en el espacio colectivo, los/las estudiantes propongan algunas fórmulas incorrectas (por ejemplo: $2t$, t^2, etc.) que puedan ser contrastadas con los valores de la tabla.

Una vez socializada la fórmula $B(t)= 2^t$, será importante comenzar a caracterizar este tipo de variaciones —con la variable en el exponente— como **situaciones de crecimiento exponencial**.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Comentarios didácticos del Problema 2

En el Problema 2, los datos son ofrecidos a partir de una tabla y en el enunciado se explicita que se trata de una situación de crecimiento exponencial. En esta oportunidad, las dos variables involucradas son continuas y se parte de un valor inicial distinto de 1. La primera consigna apunta a leer información de la tabla con el propósito de recuperarla a la hora de producir la fórmula. Para responder la consigna **b.**, las/los estudiantes podrían establecer relaciones entre los datos que se ofrecen y llegar a inferir que en cada hora se triplica la masa de la sustancia. Para llegar a obtener el valor en t = 10, podrían recurrir a distintas estrategias. Por ejemplo, es posible completar todos los valores intermedios a partir de t = 5 o expresar la masa de ese instante (t = 10) como $6075 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Otra posibilidad es que la calculen a partir de t = 0, como $25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$: esto dará pie a escribir el cálculo $25 \cdot 3^{10}$. En el caso de t = 7,5 no es posible obtener el valor de la masa a partir de multiplicaciones sucesivas, sino que será necesario expresar el resultado mediante el cálculo $25 \cdot 3^{7,5}$. Es probable que algunos/as estudiantes intenten encontrar este valor a partir de $25 \cdot 3^7 = 2871$ y $25 \cdot 3^8 = 6561$, como si el crecimiento fuera lineal; es decir, buscando el punto medio entre esos valores. Será una buena oportunidad para descartar el uso del crecimiento lineal en este tipo de situaciones. Por ejemplo, podría observarse que el crecimiento durante la primera hora no es el mismo que en el transcurso de la segunda hora; esta condición asegura que el crecimiento de esta sustancia no es lineal. La consigna **c.** propone la generalización a partir de la producción de la fórmula $M(t) = 25 \cdot 3^t$.

Comentarios didácticos del Problema 3

En el Problema 3 aparece por primera vez el crecimiento porcentual como otra forma de describir la variación exponencial. Si la/el docente lo considera necesario, podrá realizar en esta instancia una revisión de los procedimientos para calcular porcentajes. Otra opción posible consiste en realizar intervenciones en la medida en que aparezcan obstáculos en la resolución del problema.

En particular en esta situación, como la variable independiente es el tiempo, el dominio está definido en R_0^+.

En la primera consigna se espera que los/las estudiantes completen la tabla y expliquen los procedimientos que usaron. A los efectos prácticos, se sugiere trabajar con aproximaciones a dos decimales para completar la tabla. Algunos de los procedimientos que podrían utilizar son los siguientes:

- Para encontrar la masa en cada hora, se calcula el 25% de la masa anterior y luego se suman. Por ejemplo, para $t = 2$ se puede realizar $250 \cdot \frac{25}{100} + 250$.
- Para encontrar la masa en cada hora, se calcula ¼ de la masa anterior y se la suma. Por ejemplo, para $t = 2$ se puede realizar $250 \cdot \frac{1}{4} + 250$.

La consigna **b.** propone analizar el valor de verdad de algunas afirmaciones. En el caso de la primera, se pretende descartar el crecimiento lineal como un modo de resolver el problema. La segunda y la tercera afirmación proponen analizar un procedimiento general para cualquier valor de la variable independiente. Luego, en la consigna **c.**, se pondrá a prueba el funcionamiento de ese procedimiento, y estas ideas serán el soporte para el análisis de las fórmulas en la consigna **d.**. En este análisis, se espera que las/los estudiantes puedan descartar todas las expresiones que pertenecen a una situación de crecimiento lineal. Para las fórmulas exponenciales, podrán establecer la equivalencia entre algunas de ellas a partir de los procedimientos utilizados para completar la tabla o apoyándose en las transformaciones entre las distintas expresiones.

En la consigna **e.** se propone calcular la masa para $t = 18{,}5$ con la intención de utilizar algunas de las fórmulas correctas. El/la docente podría proponer en esta instancia utilizar las fórmulas para verificar los valores obtenidos en la consigna **a.**

Comentarios didácticos del Problema 4

En el Problema 4 se trabaja por primera vez con una situación en la que la variación exponencial es decreciente. A partir del análisis realizado en el Problema 3, se espera que las/los estudiantes puedan completar la tabla y producir una fórmula para modelizar la situación. Algunas fórmulas pueden ser:

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

$M(t) = 5 \cdot 0{,}9^t$ $M(t) = 5 \cdot (1 - 0{,}10)^t$ $M(t) = 5 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^t$

En el espacio colectivo podrán estudiarse cada una de las fórmulas producidas relacionándolas entre sí y analizando su pertinencia para la resolución del problema.

La consigna **c.** apunta a analizar que, matemáticamente, la cantidad de medicamento en sangre nunca llega a cero. Si se lo interpreta desde la fórmula, no es posible encontrar un valor de t tal que $5 \cdot 0{,}9^t = 0$. Será una oportunidad para debatir con las/los estudiantes acerca de la modelización matemática, su potencia y sus limitaciones para describir la situación. En esta instancia, la/el docente podrá proponer retomar los problemas anteriores y analizar si esto también ocurre en ellos. Además, será un momento adecuado para estudiar similitudes y diferencias entre los cuatro problemas.

Se espera que en esta instancia se comience a caracterizar a las funciones exponenciales como las funciones representadas por fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$. También será importante determinar con las/los estudiantes cuáles son los valores que pueden tomar los parámetros k y a en este tipo de funciones.

Actividad 2. Estudio de la función exponencial

En esta actividad se comienza a trabajar con problemas descontextualizados y con el análisis de las funciones exponenciales, sus gráficos, sus fórmulas y las relaciones entre ellos.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Actividad 2 Estudio de la función exponencial

En los problemas de la actividad 1 estuvieron trabajando con situaciones de crecimiento exponencial en las que completaron tablas, escribieron y analizaron fórmulas relacionadas con cada situación. Esas fórmulas responden a la expresión $f(x) = k \cdot a^x$, donde:

- La variable x puede tomar valores reales positivos, incluido el cero.
- k es una constante real, distinta de cero.
- a es otra constante real positiva, distinta de uno.

En esta actividad resolverán problemas sobre funciones exponenciales donde la variable x puede ser cualquier número real.

Problema 1

a. A partir de la función $f(x) = 2^x$ completen la siguiente tabla:

x	-5	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	4	10
$f(x) = 2^x$								

b. ¿Cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la función $f(x) = 2^x$? Expliquen sus respuestas.

Gráfico 1

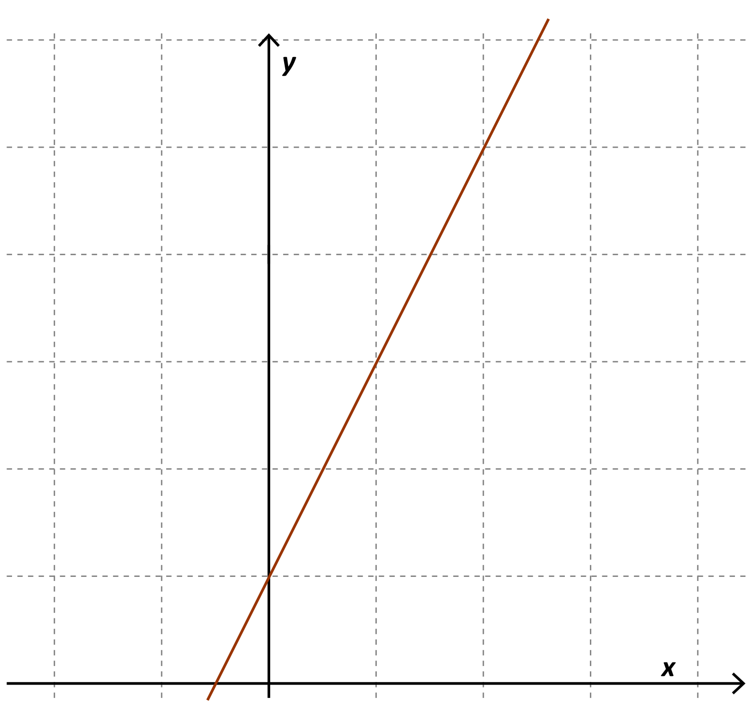
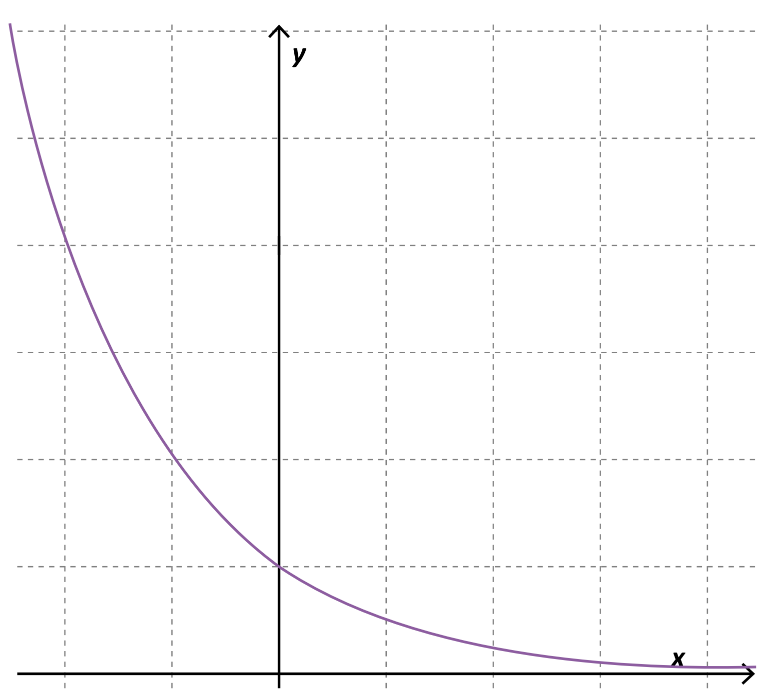


Gráfico 2



G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Gráfico 3

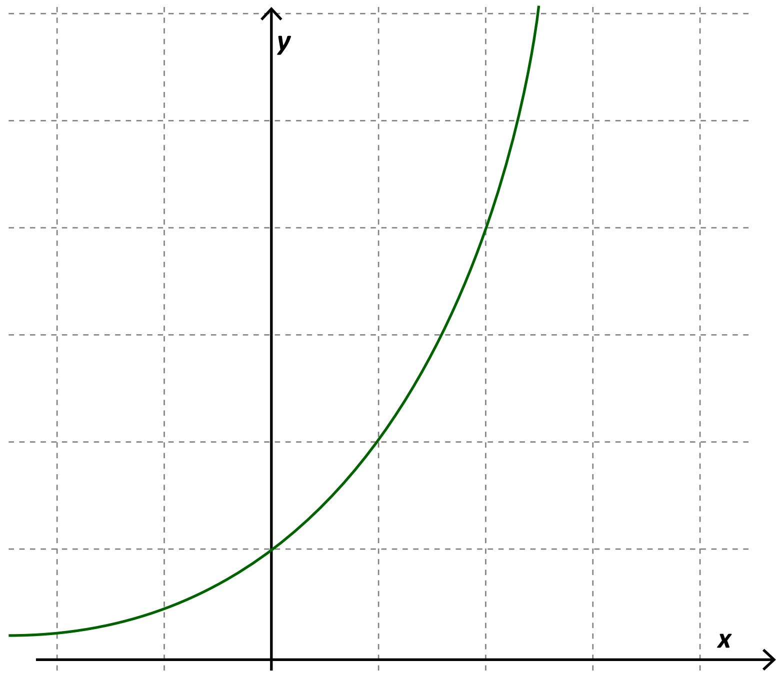


Gráfico 4

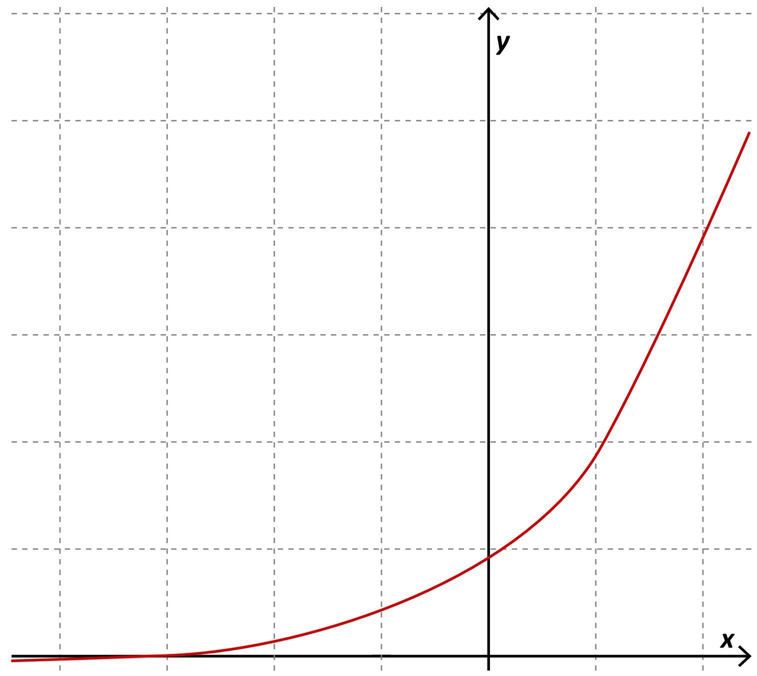
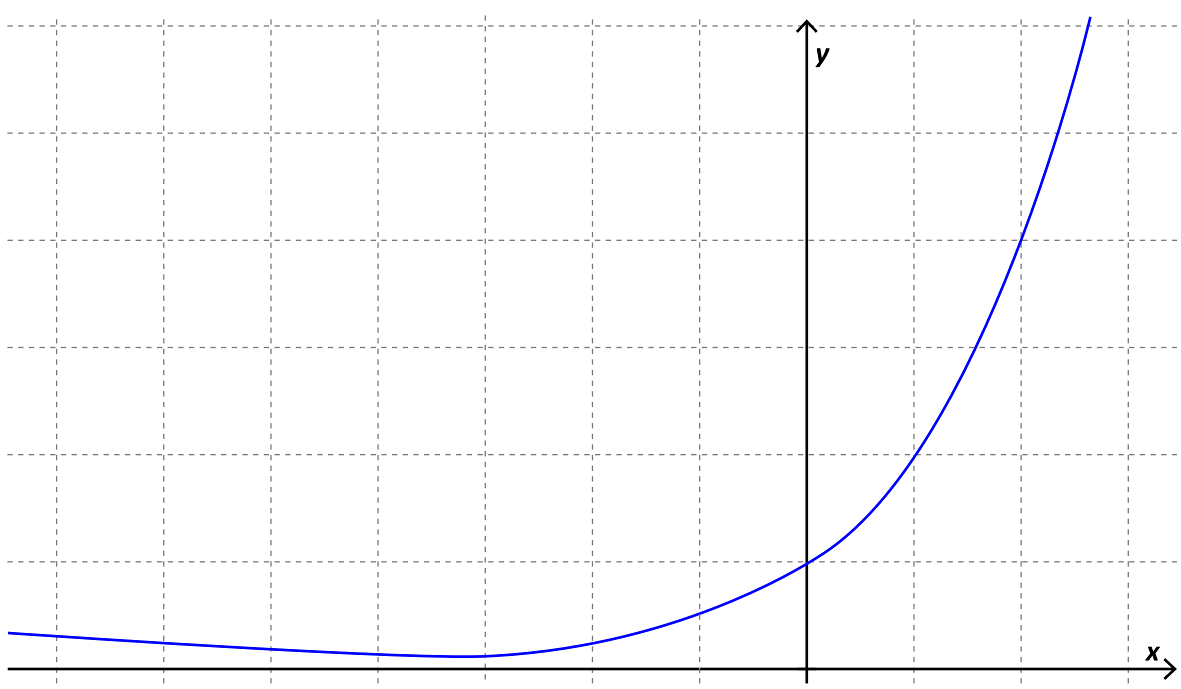


Gráfico 5



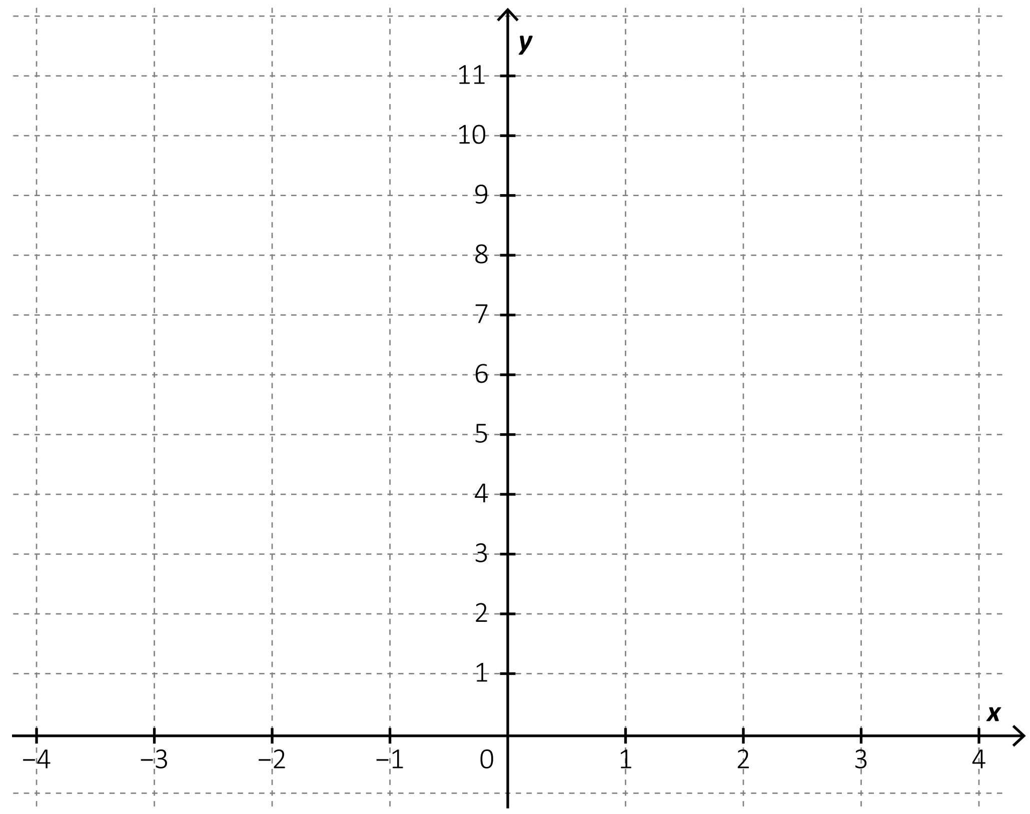
G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

c. Para la función $f(x) = 2^x$ determinen, si es posible: dominio, imagen, ordenada al origen, raíces, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Problema 2

a. Grafiquen las tres funciones en el siguiente el sistema de ejes cartesianos.

$f(x) = 3^x$ $\qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\qquad h(x) = 2 \cdot 3^x$



b. Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen por qué.

- $f(2) = g(-2)$
- Las tres funciones tienen la misma ordenada al origen.
- Las tres funciones son crecientes en todo su dominio.
- Para cada valor de x, $h(x)$ es el doble de $f(x)$.
- Las funciones no cortan al eje x.

Problema 3

A continuación se presentan las fórmulas de seis funciones (f, g, j, h, m, n) y seis gráficos (A, B, C, D, E y F). Decidan, para cada una de las fórmulas, cuál es el gráfico que le corresponde y expliquen por qué.

$f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad$ $g(x) = -2 \cdot 3^x$ $\quad$ $j(x) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$h(x) = 0{,}5 \cdot 4^x$ $\quad$ $m(x) = 4 \cdot 2^x$ $\quad$ $n(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Gráfico A

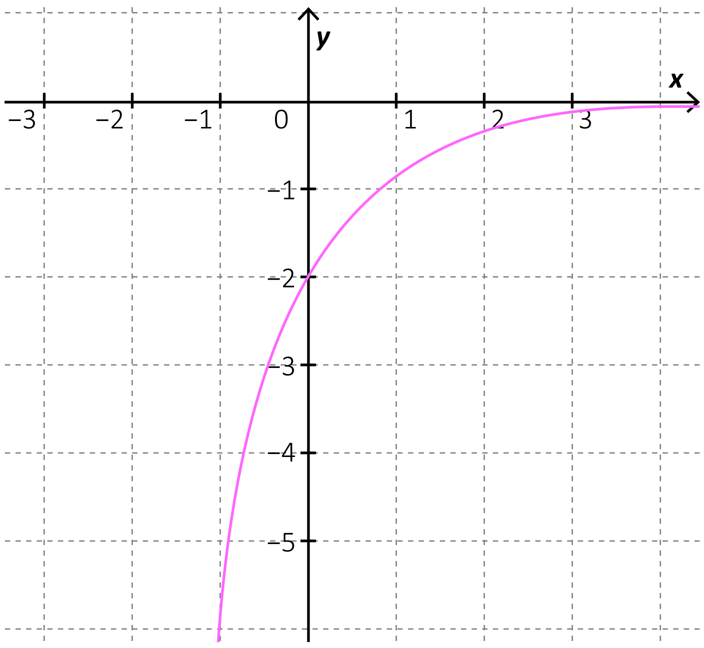


Gráfico B

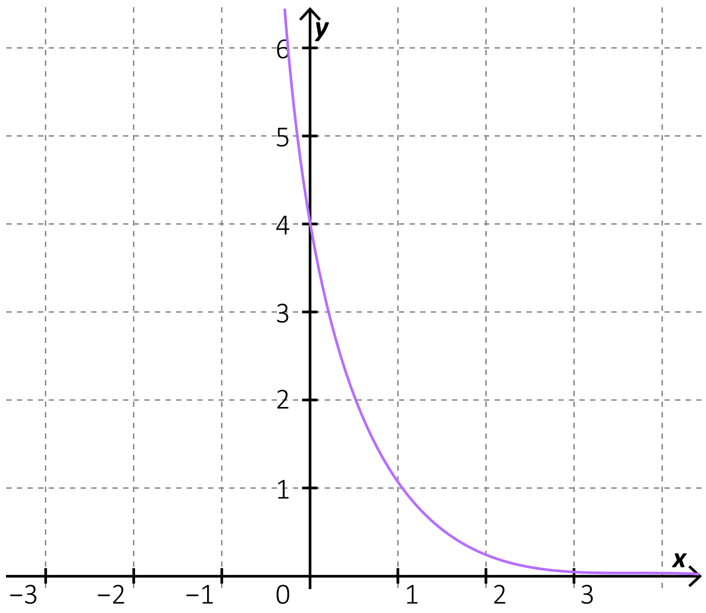


Gráfico C

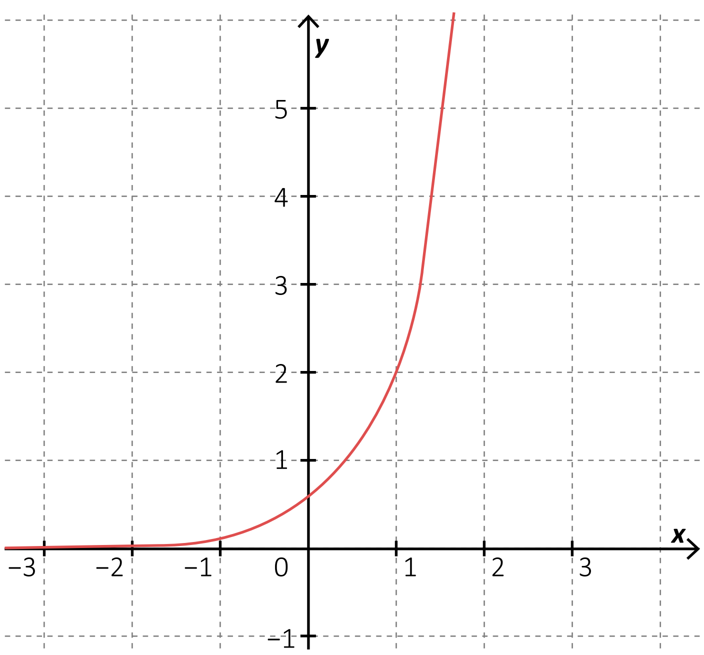


Gráfico D

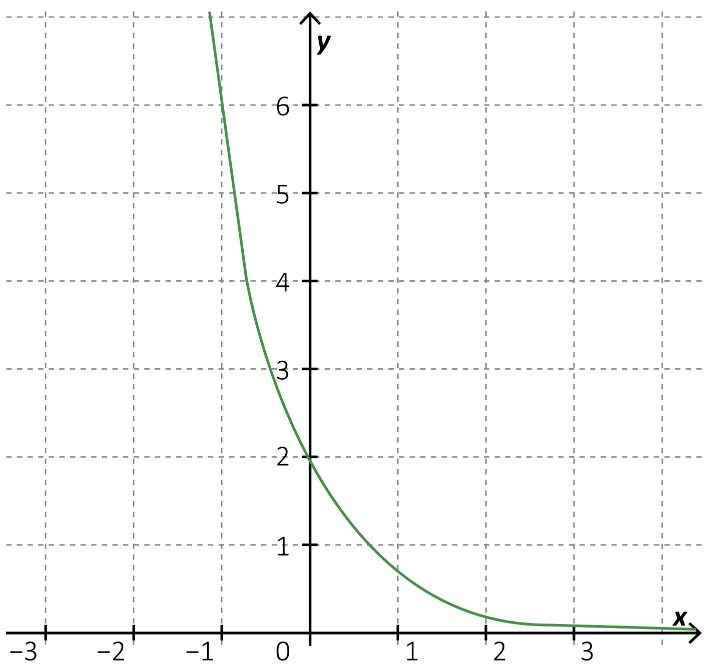


Gráfico E

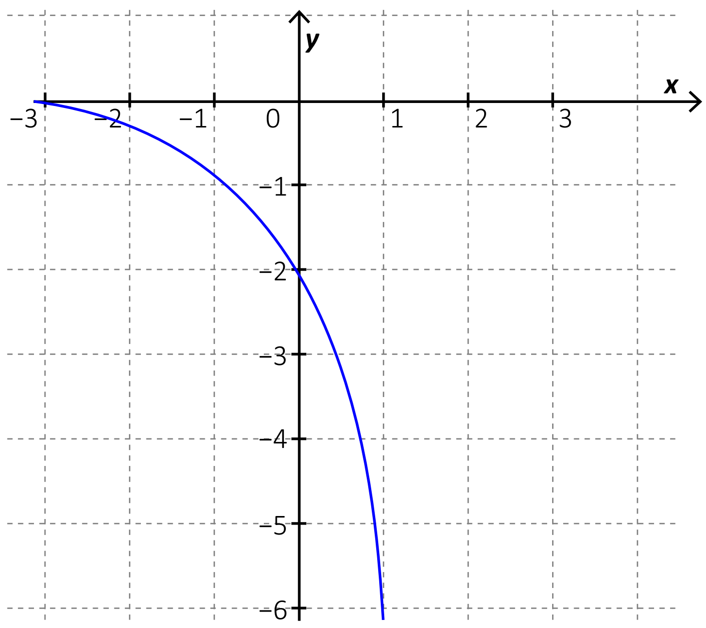
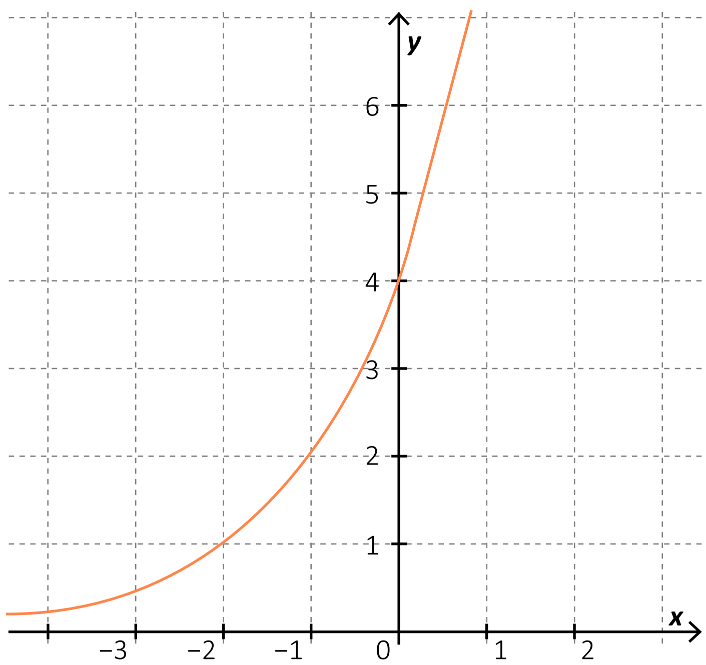


Gráfico F



G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Comentarios didácticos del Problema 1

En el Problema 1 se retoma la fórmula $f(x) = 2^x$, pero esta vez con dominio en el conjunto de los números reales y sin ofrecer un contexto de referencia. En esta instancia será necesario recuperar algunas propiedades de la potenciación que permitan a las/los estudiantes trabajar con los exponentes negativos y racionales.

En la consigna **b.**, se analiza por primera vez el gráfico de una función exponencial. Se pretende que las/los estudiantes comiencen a caracterizarlo a partir de analizar cada uno de los gráficos propuestos, descartando los que no corresponden:

- Gráfico 1: puede ser descartado porque describe un crecimiento lineal y, además, interseca al eje de las abscisas.
- Gráfico 2: es decreciente, es decir, a diferencia de lo que ocurre en la tabla, en el gráfico, al aumentar la variable *x* disminuye la variable *y*.
- Gráfico 4: este gráfico tiene la característica de intersecar el eje *x* y por este motivo puede ser descartado.
- Gráfico 5: si bien este gráfico no tiene escala y pareciera responder a algunos valores de la tabla, tiene la característica de "alejarse del eje *x*" a medida que la variable independiente toma valores negativos que se alejan del origen de coordenadas; esta particularidad es lo que permite descartarlo. Será entonces una oportunidad para introducir o retomar la noción de asíntota. No se espera una definición formal, sino que podría describirse como "la recta a la cual la función se acerca cada vez más, a medida que disminuyen los valores de la variable independiente".

El Gráfico 3 es el único que podría corresponder a la situación planteada. Será necesario poner en discusión qué escala elegir para los ejes coordenados, de manera tal que se corresponda con la función $f(x) = 2^x$.

En la consigna **c.** se propone realizar el análisis de la función $f(x) = 2^x$. A partir de los distintos registros de representación podrán analizar: dominio, imagen, ordenada al origen, raíces, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Comentarios didácticos del Problema 2

En el Problema 2, los/las estudiantes se enfrentan por primera vez a la tarea de producción de gráficos de funciones exponenciales. Se propone que se realicen los tres gráficos en el mismo sistema cartesiano, de manera de poder establecer relaciones entre ellos. Para facilitar la tarea se ofrecen los ejes trazados con una escala definida.

La consigna **b.** permite profundizar el análisis sobre algunas características de estas funciones. Para la primera afirmación, una vez establecida con el grupo la igualdad $f(2) = g(-2)$, la/el docente podrá proponer analizar si esto sucede para otros valores, avanzando hacia la generalización $f(x) = g(-x)$. Esta equivalencia podrá ser validada a partir de las propiedades de la potenciación.

En el caso de la segunda afirmación, se espera que los/las estudiantes puedan responder a partir del análisis de los gráficos, profundizando la relación entre la fórmula y el crecimiento o decrecimiento de la función.

En la tercera afirmación, se plantea una formulación general. En una primera instancia, las/los estudiantes podrán argumentar a partir de ejemplos y, considerando esas producciones, la/el docente podrá introducir una validación algebraica, mediante el análisis de las fórmulas.

La última afirmación propone estudiar una característica de las funciones f, g y h con el propósito de generalizarla para todas las funciones exponenciales de la forma $f(x) = k \cdot a^x$. Se espera que los/las estudiantes puedan producir argumentos del tipo:

- El gráfico de estas funciones se aproxima cada vez más al eje x, pero no lo corta.
- Si a 3 o a $\frac{1}{3}$ lo elevo a un exponente real, nunca me va a dar cero el resultado.
- No existe ningún número real que, elevado a otro, me dé como resultado cero.

Comentarios didácticos del Problema 3

Este problema tiene el objetivo de reutilizar y sistematizar el trabajo realizado a lo largo de la secuencia. Se espera que las/los estudiantes puedan estudiar las características de cada gráfico en función de los valores de los parámetros k y a. Un primer análisis para relacionar los gráficos con las fórmulas consiste en evaluar el valor de cada función para $x = 0$. Con este trabajo se podrá llegar a la siguiente generalización: en las funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x$, el valor de k representa la ordenada al origen. El/la docente podría proponer en esta instancia una validación algebraica para esa conclusión, planteando $f(0) = k \cdot a^0$. Para los casos en los que las funciones tienen la misma ordenada al origen, será necesario analizar el valor de a. Es posible que las/los estudiantes den valores a la variable x para obtener algunas coordenadas de puntos de cada función y contrastarlos con el gráfico. Será importante que la/el docente proponga además analizar algunas relaciones entre el

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

valor del parámetro *a* y el crecimiento de las funciones, así como también entre el valor de *k* y los conjuntos de positividad y negatividad de cada una de ellas.

Algunas conclusiones que pueden quedar registradas en las carpetas luego del trabajo con este problema son:

Para funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x$

- El número *k* es la ordenada al origen.
- Si *k* es positivo, la función es positiva en todo su dominio.
- Si *k* es negativo, la función es negativa en todo su dominio.
- Si *k* es positivo ocurre que:
  - si *a* es mayor a 1, la función es creciente;
  - si *a* es menor a 1, la función es decreciente.

También será una oportunidad para recuperar algunas ideas trabajadas en el Problema 4 de la primera actividad, relacionadas con los posibles valores de estos parámetros.

- El parámetro *k* puede tomar cualquier valor real excepto 0.
- El parámetro *a* puede tomar cualquier valor real positivo menos el 1.

Es importante destacar que será necesario discutir con las/los estudiantes los argumentos que sostienen estas afirmaciones.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Orientaciones para la evaluación

Como se mencionó en la introducción, este material presenta una posible secuencia para avanzar en el estudio de las funciones exponenciales del tipo $f(x) = k \cdot a^x$. De esta manera, las sucesivas discusiones en los espacios de trabajo colectivo de la clase cargan de nuevos sentidos esos conocimientos e ideas, y habilitan la construcción de otros. Así, será un trabajo progresivo en el que los/las estudiantes —con el sostén de las intervenciones docentes— irán enriqueciendo y fortaleciendo el entretejido de conocimientos matemáticos en relación con este tema.

En este sentido, algunas dimensiones por considerar en relación con los conocimientos que las/los estudiantes han adquirido a partir del trabajo con los problemas planteados pueden ser:

- El avance en la conceptualización de las funciones exponenciales de la forma $f(x) = k \cdot a^x$, con el propósito de caracterizar:
  - el tipo de crecimiento exponencial;
  - las fórmulas de las funciones exponenciales, reconociendo la relación entre los valores de sus parámetros y el gráfico;
  - los gráficos de las funciones exponenciales.
- La progresiva identificación de procedimientos erróneos e incompletos.
- La identificación de procedimientos adecuados y su reutilización y adaptación para la resolución de nuevas situaciones.
- La progresiva apropiación de herramientas matemáticas para la utilización y la interpretación de los diferentes registros de representación, así como el análisis de la información que brinda cada uno de ellos.
- La progresiva apropiación de la necesidad de validar algebraicamente las conjeturas elaboradas —tanto las propias como las de sus compañeros/as— a partir de las exploraciones con los gráficos.
- La formulación de conjeturas que tengan paulatinamente un mayor grado de generalidad, partiendo del análisis de casos particulares hacia la elaboración de argumentos que sostienen ciertas generalizaciones.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Bibliografía

Bibliografía consultada

Ministerio de Educación [M.E.]. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. (2015). *Diseño Curricular para la Nueva Escuela Secundaria. Ciclo Orientado del Bachillerato*, Formación General. Buenos Aires: GCABA.

Bibliografía recomendada

Carpintero, Cristina (2014). Matemática. *La función exponencial, una secuencia posible*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Buenos Aires: GCABA.

En este material se proponen situaciones que buscan promover el estudio y análisis de procesos cuya variación es exponencial, en contextos geométricos y extramatemáticos. Además, se propicia el estudio de características que definen a la función exponencial, sus propiedades, gráficos, y se ahonda en situaciones que demandan procesos de fundamentación a partir de las propiedades que verifican este tipo de funciones.

G.C.A.B.A. | Ministerio de Educación e Innovación | Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología.

Vamos Buenos Aires