Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Apuntes para la enseñanza

Matemática

Fracciones y números decimales

7

PLAN PLURIANUAL

2004
2007

PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA

Matemática

Fracciones y números decimales. 7º grado

Apuntes para la enseñanza

G.C.B.A.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires . Secretaría de Educación .
Dirección General de Planeamiento . Dirección de Currícula

Matemática, fracciones y números decimales 7º grado : apuntes
para la enseñanza / dirigido por Cecilia Parra - 1a ed. -
Buenos Aires : Secretaría de Educación - Gobierno de la
Ciudad de Buenos Aires, 2005.
40 p. ; 28x22 cm. (Plan plurianual para el mejoramiento de la
enseñanza 2004-2007)

ISBN 987-549-285-X

1. Educación-Planes de Estudio I. Parra, Cecilia, dir.
CDD 372.011

Tapa: *Laberinto de luz en la recova*, de Miguel Ángel Vidal, pintura acrílica, 1979 (fragmento).

ISBN 987-549-285-X

Secretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula. 2005
Hecho el depósito que marca la Ley nº 11.723

Paseo Colón 255. 9º piso.
CPAc1063aco. Buenos Aires
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

G.C.B.A.

"Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007"

Dirección de Currícula
Dirección: Cecilia Parra.
Coordinación de área de Educación Primaria: Susana Wolman.
Colaboración en área de Educación Primaria: Adriana Casamajor.
Coordinación del área de Matemática: Patricia Sadovsky.

MATEMÁTICA. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES. 7º GRADO. APUNTES PARA LA ENSEÑANZA
COORDINACIÓN AUTORAL: PATRICIA SADOVSKY.
ELABORACIÓN DEL MATERIAL: CECILIA LAMELA Y DORA CARRASCO.
sobre la base de: Héctor Ponce y María Emilia Quaranta. *Matemática. Grado de Aceleración 4°- 7°. Material para el alumno. Material para el docente.* 2003/2004. (Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad en el nivel primario de la Ciudad de Buenos Aires, Proyecto conformación de grados de aceleración.)

G.C.B.A.

EDICIÓN A CARGO DE LA DIRECCIÓN DE CURRÍCULA.

Coordinación editorial: Virginia Piera.
Coordinación gráfica: Patricia Leguizamón.
Diseño gráfico y supervisión de edición: María Laura Cianciolo, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta.
Ilustraciones: Andy Crawley. Gustavo Damiani.
Edición para el sitio web: María Laura Cianciolo.

Apoyo administrativo y logístico: Gustavo Barja, Olga Loste, Jorge Louit, Miguel Ángel Ruiz.

Índice

Presentación

La Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires se propone en el marco de su política educativa desplegar una serie de acciones para impulsar el mejoramiento de la enseñanza en el nivel primario. En pos de ese propósito pone en marcha, para el período 2004-2007, el "Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza en el Segundo Ciclo del Nivel Primario" en las escuelas de la Ciudad con los siguientes objetivos generales:

- Producir mejoras en la enseñanza en el segundo ciclo de la escuela primaria colocando, sucesivamente, áreas y ejes dentro de éstas como motivo central de los intercambios y de los esfuerzos compartidos.

- Promover debates sobre cuáles son las condiciones pedagógicas adecuadas para asegurar los aprendizajes buscados en las áreas y los ejes seleccionados.

- Construir una visión compartida sobre los aprendizajes centrales que la escuela primaria debe garantizar para todos los alumnos y alumnas, y sobre las condiciones de enseñanza que permiten su logro –programación, modalidades, recursos, entre otros.

- Instar a un trabajo institucional que permita articular un proyecto común en el que se inserten las responsabilidades de cada docente –supervisores, directivos y maestros– y cobren sentido las experiencias formativas de los alumnos.

- Contribuir en la construcción y la difusión de herramientas conceptuales y metodológicas que permitan realizar, para cada área, el seguimiento y los reajustes necesarios en función de la continuidad y la progresión de la enseñanza a lo largo del segundo ciclo.

Asimismo, la Secretaría de Educación asume el compromiso de proveer recursos de enseñanza y materiales destinados a maestros y alumnos. Por tanto, se presentan a la comunidad educativa las siguientes publicaciones para el trabajo en el aula en las áreas de Matemática y Prácticas del Lenguaje.

Matemática. Fracciones y números decimales integra un conjunto de documentos destinados a cada grado del segundo ciclo, en los que se aborda el tratamiento didáctico de los números racionales contemplando el complejo problema de su continuidad y profundización a lo largo del ciclo. La serie se compone de *Apuntes para la enseñanza*,* destinados a docentes de 4º, 5º, 6º y 7º grados, y de *Páginas para el alumno*. Cada documento de *Apuntes para la enseñanza* está organizado en actividades que implican una secuencia de trabajo en relación con un contenido. En cada actividad, los docentes encontrarán una introducción al tema, problemas para los alumnos, su análisis y otros aportes que contribuyen a la gestión de la clase. En *Páginas para el alumno* se presentan esos problemas.

La elección de números racionales obedece –como puede leerse en la "Introducción" de *Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza*– a varias razones: es un campo de contenidos complejos, ocupa un lugar central en la enseñanza en segundo ciclo, y la propuesta formulada en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria* 2004** plantea modificaciones al modo en el que se concibió su tratamiento didáctico en la escuela durante mucho tiempo. Por ello, se requieren para su enseñanza materiales más cercanos al trabajo del aula y que puedan constituir un aporte para abordar su articulación y evolución a lo largo del ciclo.

La presentación de los documentos correspondientes al área Prácticas del Lenguaje tiene por objetivo alentar la lectura de novelas en el segundo ciclo. La serie se inicia con *Robin Hood* y *El diablo en la botella*. Acompañando las novelas que llegarán a las escuelas, los maestros dispondrán de *Orientaciones para el docente* y los niños, de *Páginas para el alumno*, en los cuales se ofrece información sobre el tiempo histórico en el que ocurren los hechos narrados en cada novela, las realidades de las regiones a las que alude el relato, su autor en el caso de *El diablo en la botella*. La propuesta ofrece a los alumnos la oportunidad de enfrentarse simultáneamente a un texto narrativo extenso y a diversos textos informativos –artículos de enciclopedia, esquemas con referencias, notas al pie y varios epígrafes.

Los documentos son concebidos como recursos disponibles para el equipo docente, que es quien decide su utilización. Los materiales de Prácticas del Lenguaje se incorporan a la biblioteca de la escuela para facilitar que los docentes dispongan de ellos cuando lo prefieran. En el caso de Matemática, todos los docentes de segundo ciclo que trabajan esta área recibirán *Apuntes para la enseñanza* y podrán solicitar los materiales para entregar a los alumnos.

Las decisiones que los docentes tomen sobre el uso de estos materiales y el análisis de sus efectos serán insumos para reflexionar acerca de la enseñanza. Deseamos reiterar la importancia de que hagan llegar, por los diversos medios habilitados (reuniones, correo electrónico), todos sus comentarios y sugerencias sobre los materiales. Esto permitirá su mejoramiento, a favor de su efectiva utilidad en las escuelas y las aulas, y puede representar también oportunidades de diálogo en torno a las preocupaciones y los proyectos compartidos.

* En la introducción de estos documentos se explicitan posibilidades de opción en cuanto a la solicitud y la secuenciación de los materiales para los alumnos, ordenados por complejidad más que por su determinación estricta para un grado. Por ejemplo, lo propuesto para 4º puede ser utilizado a inicios de 5º o lo propuesto para 6º extendido a 7º grado.

** G.C.B.A., Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Primer ciclo de la Escuela Primaria / Educación General Básica*, 2004 y *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo de la Escuela Primaria / Educación General Básica*, 2004, tomos 1 y 2.

Introducción

Desde que el *Pre Diseño Curricular*[1] para el segundo ciclo comenzó a difundirse, muchos docentes han planteado la necesidad de contar con materiales más directamente vinculados al trabajo del aula que los ayuden a interpretar los lineamientos curriculares. Dichos lineamientos tienen actualmente plena vigencia a raíz de la aprobación del *Diseño Curricular para la Escuela Primaria,* [2] primero y segundo ciclo.

Muchos docentes reconocen que las propuestas de cambio curricular en la Ciudad de Buenos Aires apuntan a enriquecer la experiencia educativa de los alumnos, al tiempo que solicitan "mediaciones" entre esas formulaciones y las prácticas del aula.

Por otro lado, en el marco del "Plan Plurianual para el Mejoramiento de la enseñanza en el Segundo Ciclo del Nivel Primario", se ha identificado la dificultad de elaborar proyectos de enseñanza que articulen el trabajo matemático de un año a otro y hagan "crecer" la complejidad de contenidos que atraviesan el ciclo.

La serie de documentos "Matemática. Fracciones y números decimales en el segundo ciclo" responde tanto a la voluntad de desplegar la propuesta del *Diseño Curricular* como a la de ofrecer herramientas para abordar la planificación y el desarrollo de la enseñanza en el segundo ciclo en orden a una complejización creciente.

Entre las diversas maneras en que se busca fortalecer a los equipos docentes, se optó, en este caso, por la elaboración de *Apuntes para la enseñanza* con propuestas analizadas y acompañarlas con *Páginas para el alumno* en las que se incluyen los problemas seleccionados.

Al presentar estas secuencias, la intención es contribuir a mostrar cómo pueden los maestros hacer evolucionar la complejidad de los contenidos que se proponen, ayudando a los alumnos a tejer una historia en la que puedan transformar su "pasado escolar" –lo ya realizado– en una referencia para abordar nuevas cuestiones, al tiempo que cobran conciencia de que progresan y de que son capaces de enfrentar cada vez asuntos más difíciles ("esto antes no lo sabía y ahora lo sé").

Disponer de secuencias de enseñanza en las que se encara tanto el tratamiento didáctico de uno de los sentidos de un concepto para los distintos grados del ciclo como de distintos sentidos de un concepto para un mismo grado, puede constituir un aporte para enfrentar el complejo problema de la articulación y la evolución de los contenidos a lo largo del ciclo.

1 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica (Educación Primaria y Media, según denominación vigente)*, 1999.

2 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*, primero y segundo ciclo, 2004.

Por otro lado, los docentes encontrarán en estos materiales situaciones "de repaso" en las que se invita a los alumnos a revisar un tramo del recorrido escolar, proponiéndoles una reflexión sobre el mismo que "ponga a punto" su entrada en un nuevo tema. También son numerosas las apelaciones a hacer síntesis y a plantear conclusiones a propósito de un conjunto de problemas. Tal vez al principio estas conclusiones estén muy contextualizadas en los problemas que les dieron origen, será tarea del maestro hacer que se les atribuya un carácter cada vez más general. El alumno debe intervenir en el trabajo de articulación de las diferentes zonas del estudio de los números racionales; para que pueda hacerlo, el maestro debe convocarlo explícitamente a esa tarea y contribuir con él en su realización.

El material está organizado en actividades, cada una es una secuencia de trabajo que apunta a un contenido y que incluye varios problemas. En general se presenta una introducción sobre los asuntos en juego en la actividad, se proponen problemas para los alumnos y se efectúa un análisis de los mismos donde se ofrecen elementos para la gestión del docente. Muchas veces se sugieren, como parte del análisis de las secuencias, cuestiones nuevas para plantear a los alumnos. Es decir, el trabajo realizado por los alumnos en un cierto tramo ofrece un contexto para abordar cuestiones más generales que no tendrían sentido si dichas actividades no se llevaran a cabo. Tomar como "objeto de trabajo" una serie de problemas ya realizados, analizarlos y hacerse preguntas al respecto da lugar a aprendizajes diferentes de los que están en juego cuando el alumno resuelve un problema puntual.

A continuación se informa sobre la disponibilidad de los materiales para luego fundamentar por qué se ha elegido el campo de los números racionales para iniciar esta modalidad de producción.

"Matemática. Fracciones y números decimales" se compone de *Apuntes para la enseñanza* (4°, 5°, 6° y 7° grado) destinado a los docentes y *Páginas para el alumno* (4°, 5° y 6° grado). *Apuntes para la enseñanza* se entrega a los maestros de acuerdo con el grado en que se desempeñan; una vez que el equipo docente decide desarrollar las propuestas, solicita la cantidad de ejemplares necesarios de *Páginas para el alumno.* Este material, que se presenta con el formato de hoja de carpeta, será entregado a cada alumno para que trabaje en él.

El docente habrá advertido que los materiales están organizados por grado, sin embargo no necesariamente deben ser empleados según dicha correspondencia. Se sugiere que el equipo docente analice todo el material y decida su utilización ya sea tal como se presenta o bien según sus criterios y la historia de enseñanza que se viene desplegando. En este sentido, pueden elegir materiales correspondientes a dos años para ser empleados por el mismo grupo de alumnos. Por ejemplo, para los alumnos de 6° grado se podrán solicitar tanto *Páginas para el alumno* correspondientes a 5º como a 6º grado; o bien, las actividades que se presentan en *Páginas para el alumno* correspondiente a 6° pueden ser incluidas o retomadas en 7º. Es decir, no habrá inconveniente en que los maestros soliciten materiales correspondientes a dos grados para sus alumnos.

En *Apuntes para la enseñanza, 7° grado,* se incluyen actividades a realizar por los alumnos. Sin embargo, éstas no han sido impresas en forma independiente sino que constituyen opciones posibles cuya inclusión depende de la planificación y del balance que los docentes de 7º hagan entre los muchos temas importantes del año.

¿Por qué una propuesta sobre números racionales?

En primer lugar, se trata de un campo de contenidos complejo, cuya elaboración comienza en cuarto grado y continúa más allá de la escuela primaria, que supone rupturas importantes con las prácticas más familiares que los alumnos desplegaron a propósito de los números naturales.

Como se explicita en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*, segundo ciclo:

"El estudio de los números racionales –escritos en forma decimal o fraccionaria– ocupa un lugar central en los aprendizajes del segundo ciclo. Se trata –tanto para los niños como para los maestros– de un trabajo exigente que deberá desembocar en un cambio fundamental con respecto a la representación de número que tienen los niños hasta el momento. Efectivamente, el funcionamiento de los números racionales supone una ruptura esencial con relación a los conocimientos acerca de los números naturales: para representar un número (la fracción) se utilizan dos números naturales, la multiplicación no puede –salvo cuando se multiplica un natural por una fracción– ser interpretada como una adición reiterada, en muchos casos el producto de dos números es menor que cada uno de los factores, el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo, los números ya no tienen siguiente...

"Por otra parte, como ocurre con cualquier concepto matemático, usos diferentes muestran aspectos diferentes.[3] *Un número racional puede:*

- *ser el resultado de un reparto y quedar, en consecuencia, ligado al cociente entre naturales;*
- *ser el resultado de una medición y, por tanto, remitirnos a establecer una relación con la unidad;*
- *expresar una constante de proporcionalidad; en particular esa constante puede tener un significado preciso en función del contexto (escala, porcentaje, velocidad, densidad...);*
- *ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo;*
- *etcétera."*

Se considera entonces necesario contribuir con los docentes en la organización de esta complejidad, proponiendo un desarrollo posible.

En segundo lugar, el *Diseño Curricular* plantea modificaciones al modo en que por años se concibió el tratamiento de los números racionales en la escuela. ¿A qué tipo de cambios respecto de lo tradicionalmente instituido nos estamos refiriendo?

Al organizar los contenidos por "tipos de problemas que abarcan distintos sentidos del concepto" (reparto, medición, proporcionalidad, etc.), el *Diseño Curricular* propone que se aborden en simultáneo asuntos que usualmente aparecían segmentados en el tiempo o, incluso, distribuidos en años diferentes de la escolaridad.

Por ejemplo, se inicia el estudio de los números racionales (las fracciones) a partir del concepto de división entera, proponiendo que los alumnos "sigan repar-

3 Para ampliar los diferentes sentidos de las fracciones, véase *Matemática, Documento de trabajo nº 4*, Actualización curricular, G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currículum, 1997.

tiendo" los restos de una división y cuantifiquen dicho reparto. Al dejar abierta la posibilidad de que el reparto se realice de distintas maneras, muchos alumnos fraccionan lo ya fraccionado y luego enfrentan el problema de cuantificar esa acción. Además, los diversos modos de hacer los repartos que surgen en la clase, dan sentido a plantear la necesidad de establecer la equivalencia entre los números que representan esos repartos. Fracción de fracción y equivalencia aparecen entonces de entrada, aunque esos asuntos no se traten de manera formal sino en el contexto en el que emergen. De modo que podríamos decir: que el problema de hacer repartos y establecer su equivalencia –problema que, como antes se señaló, se propone para abordar el estudio de las fracciones– "pone juntos" los contenidos de división entera, fracción, fracción de fracción, equivalencia y orden, al tiempo que el mismo problema ofrece un contexto que da pistas para que los alumnos puedan tratarlos. En este último sentido, no diríamos, por ejemplo, que la noción "fracción de fracción" que surge de esta manera es exactamente la misma que la que se trata cuando el tema se propone aisladamente. Aclaremos el alcance de lo que señalamos: $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ es, en cualquier contexto, $\frac{1}{12}$; lo que estamos subrayando es que el modo en que se plantea la necesidad de realizar dicha operación –a partir de qué problemas, conociendo qué cuestiones– otorgará diferentes sentidos a la misma, incluyendo en la idea de sentido los elementos que tienen los alumnos para resolverla. Por otro lado, aunque del problema del reparto equitativo surja la noción de fracción de fracción, ésta deberá ser retomada en otros contextos, retrabajada, descontextualizada y formalizada. Esto demandará, sin duda, mucho tiempo: como todos sabemos, las nociones no se aprenden de una vez y para siempre sino que necesitan ser tratadas una y otra vez en distintos ámbitos y estableciendo relaciones entre ellas.

Sería legítimo preguntarse –muchos maestros lo preguntan–: "¿por qué complicar las cosas, si el trabajo ´paso a paso´ da resultado?" La pregunta remite nuevamente a la cuestión del sentido que estamos atribuyendo a la matemática en la escuela: desde nuestro punto vista, las nociones que estuvimos mencionando (fracción de fracción, equivalencia, reparto equitativo) están imbricadas unas con otras; por eso, tratarlas juntas en un contexto particular permite arrancar el estudio de las fracciones con un conjunto más amplio y más sólido de relaciones que se irán retomando con el tiempo. Tratar cada una de estas nociones de manera aislada puede ser en el momento más fácil para los alumnos, pero, al ser también más superficial, se torna "menos duradera". Menos duradera porque olvidan fácilmente aquello que no aparece entramado en una organización donde las distintas nociones que componen un campo de conceptos se relacionan unas con otras. Detrás de la idea de "lo fácil" y "lo difícil" hay cuestiones importantes para discutir respecto de la experiencia formativa que se pretende impulsar.

Sintetizando: al organizar el trabajo sobre los números racionales tomando como criterio *los ámbitos de funcionamiento del concepto* (reparto, medición, etc.), se modifica el orden de presentación que siempre tuvieron las nociones que conforman el concepto. Aprovechemos para señalar que el paso del tiempo torna "naturales" ciertos ordenamientos de los contenidos escolares que en realidad fueron producto de decisiones que respondían a cierto proyecto educativo. Cuando se revisa el proyecto, lo natural es revisar también los órdenes y relaciones entre los contenidos.

Otro asunto que plantea el *Diseño Curricular* respecto del tratamiento de los números racionales –y que se intenta plasmar en esta serie– se refiere al papel que se le otorga a las relaciones de proporcionalidad como contexto en la elaboración de criterios para operar con fracciones y decimales. Efectivamente, en las *Páginas para el alumno* de sexto grado que integran esta serie se presentan situaciones de proporcionalidad directa donde hay que operar con fracciones y decimales antes de haber formalizado y sistematizado los algoritmos correspondientes a dichas operaciones. La idea es que los alumnos resuelvan esas situaciones usando –a veces de manera implícita– las propiedades de la proporcionalidad y que, una vez resueltas, puedan analizar lo hecho y tomar conciencia de que en dicha resolución están involucrados cálculos con fracciones y decimales. Disponer del resultado de un cálculo sin conocer el algoritmo obliga a pensar cómo debe funcionar el algoritmo para obtener un resultado que ya se conoce. En algún sentido, se está invitando al siguiente mecanismo productor de conocimiento: "si este problema involucra el cálculo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ y yo ya resolví el problema y sé que el resultado es $\frac{1}{10}$, ahora me las tengo que arreglar para entender cómo funciona la multiplicación de fracciones para que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ sea $\frac{1}{10}$ ". Obviamente no estamos esperando que los niños repitan frases de este tipo, sí queremos comunicar que ese mecanismo está presente en el tratamiento de las operaciones multiplicativas con fracciones y decimales; tenerlo en cuenta conlleva el doble propósito: ofrecer a los alumnos un camino para que elaboren estrategias y operen; y, de manera más transversal, mostrar un mecanismo a través del cual se produce conocimiento matemático.

En tercer lugar, otra razón por las que se proponen materiales sobre los números racionales: quisimos mostrar la potencia de este contenido para poner en juego aspectos del trabajo matemático a los que les atribuimos un alto nivel formativo. Formular leyes para comparar números, establecer la verdad o la falsedad de enunciados, analizar la equivalencia de expresiones numéricas sin apelar al cálculo efectivo, comparar diferentes procedimientos realizados por "otros", delimitar el alcance de diferentes propiedades ("esta 'regla' vale en tales casos") son tareas que, al ubicar al alumno en un plano de reflexión sobre el trabajo llevado a cabo, le permiten comprender aspectos de la organización teórica de la disciplina, le posibilitan acceder a las razones por las cuales algo funciona de una cierta manera. Lograr que los alumnos adquieran cierto nivel de fundamentación para los conceptos y propiedades con los que tratan, es un propósito de la educación matemática que la escuela tiene que brindar.

Características de las propuestas

Las secuencias que se presentan no están en general pensadas para que los alumnos resuelvan de manera inmediata la tarea que se les propone. Sí se espera -cada vez- que puedan empezar a abordar, explorar, ensayar. En algunos casos, podrán arribar a conclusiones de manera bastante autónoma y en otros requerirán de la ayuda del docente. Alentamos la tarea de exploración como un modo de formar a un alumno autónomo, que acepta el desafío intelectual, que elabora criterios para validar su propio trabajo.

A propósito de algunos de los problemas, es probable que los alumnos evidencien cierta dificultad para entender con precisión qué es lo que se les pide. Puede ser que el docente interprete que el alumno no comprende la consigna. Sin embargo, la falta de comprensión de la consigna se vincula en general con el hecho de que la tarea en danza es conceptualmente nueva; por eso, entender lo que se pide supone para los alumnos ampliar su perspectiva respecto de los conceptos involucrados en el problema. En esos casos seguramente serán necesarias explicaciones del docente que "completen" la formulación escrita del problema. Estas explicaciones son un modo de empezar a comunicar las nuevas ideas que están en juego.

Se suele atribuir la falta de comprensión de las consignas a un tema "extra matemático" (más ligado al área de Prácticas del Lenguaje). Sin embargo, esta falta de comprensión es, en general, "matemática": los alumnos no entienden qué hay que hacer porque todavía no conciben claramente en qué consiste la tarea en cuestión. Comprenderlo es parte del aprendizaje.

Mucho se ha discutido si el docente debe o no intervenir en la tarea que realiza el alumno. Es claro que el docente debe ayudar al alumno que se encuentra "bloqueado" eso hace a la definición del trabajo docente. Tal vez sea bueno analizar que entre "decir cómo es" y "no decir nada" hay una gama importante de intervenciones que podrían dar pistas a los alumnos para seguir sosteniendo su tarea. Conocer diferentes modos de abordar la tarea puede ayudar al docente a elaborar posibles intervenciones. Ésa es la razón por la cual, al analizar las secuencias propuestas en *Apuntes para la enseñanza*, se incluyen posibles estrategias de los alumnos. La discusión de algunas de estas estrategias con el conjunto de la clase podrá enriquecer el contenido que se está tratando, aunque las mismas no hayan sido propuestas por los niños.

Lograr que los alumnos entren en un trabajo matemático más profundo –más enriquecedor, pero también más difícil– no es tarea de un día, es producto de una historia que se va construyendo lentamente en la clase. Los alumnos deben sentir que se confía en ellos, que tienen permiso para equivocarse, que su palabra es tomada en cuenta. A la vez deben aprender: a pedir ayuda identificando de la manera más precisa posible la dificultad que tienen y no sólo diciendo "no me sale", a respetar la opinión de los otros, a sostener un debate... El maestro juega un rol fundamental en estos aprendizajes.

A diferencia de lo que suele pensarse, la experiencia nos muestra que muchos alumnos se posicionan mejor frente a un problema desafiante que frente a una tarea fácil. Lograr que el alumno experimente el placer de dominar lo que en un principio se mostraba incomprensible, ayuda a que construya una imagen valorizada de sí mismo. Obviamente, esto es bueno para él, pero también es altamente satisfactorio para el docente.

Es nuestro deseo que en alguna medida estos *Apuntes para la enseñanza*, y también las *Páginas para el alumno*, contribuyan a que el docente pueda enfrentar la difícil tarea de enseñar, gratificándose con el despliegue de una práctica más rica y más plena.

La multiplicación de fracciones. Inverso multiplicativo

Actividad 1

Planteamos, en primer lugar, un trabajo en el que los alumnos pondrán en juego la noción de inverso multiplicativo: números cuyo producto es 1. Se propone esta cuestión en el contexto de áreas de rectángulos, noción que los alumnos seguramente ya han tratado, y luego se plantea un trabajo numérico descontextualizado. La aceptación de que, en el conjunto de los números racionales, se puede "pasar" multiplicando de un número racional cualquiera a otro cualquiera es compleja porque rompe con una concepción muy sólida de los alumnos, apoyada en sus conocimientos sobre números naturales, según la cual, para pasar de un número a otro multiplicando, es necesario que el segundo sea múltiplo del primero.

La noción de "múltiplo" pierde sentido en el conjunto de los números racionales porque cualquier número podría ser múltiplo de cualquier otro. En esta primera actividad se trata de discutir acerca de esta idea con los alumnos.

La multiplicación de fracciones. Inverso multiplicativo
Problemas

1) Resolvé los siguientes problemas:

a) Un rectángulo tiene 1 m^2 de área. Si su base mide 2 metros, ¿cuánto mide su altura?

b) Un rectángulo tiene 1 m^2 de área. Si su base mide 4 metros, ¿cuánto mide su altura?

c) Un rectángulo tiene 1 m^2 de área. Si su base mide 3 metros, ¿cuánto mide su altura?

d) ¿Cuántos rectángulos posibles hay que tengan 1 m^2 de área? Hallá pares de valores que puedan ser base y altura de dichos rectángulos.

2) Ya sabés que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura. Esto significa que, del problema anterior, se pueden "extraer" multiplicaciones que dan 1. Anotalas y discutí con tu compañero si él anotó las mismas.

3) Completar los siguientes espacios en blanco:

$5 \times$ ....= 1 $\qquad \frac{1}{7} \times$ ....= 1

$6 \times$ ....= 1 $\qquad \frac{1}{5} \times$ ....= 1

$8 \times$ ....= 1 $\qquad \frac{1}{9} \times$ ....= 1

4) Otros problemas para resolver:

a) Ahora vamos a considerar un rectángulo que tiene 2 m^2 de área. Si la base de ese rectángulo tiene 4 m, ¿cuánto tiene la altura?

b) ¿Cuántos rectángulos posibles hay que tengan 2 m^2 de área? Hallá pares de valores que puedan ser base y altura de dichos rectángulos.

c) Del problema anterior surgen unas cuantas multiplicaciones que dan por resultado 2. Anotalas.

5) Completá los espacios en blanco. Una ayuda: analizá los cálculos que realizaste en el problema 3.

$\frac{1}{5} \times$ ....= 2 $\qquad 5 \times$ ....= 2

$\frac{1}{7} \times$ ....= 2 $\qquad 7 \times$ ....= 2

$8 \times$ ....= 2 $\qquad \frac{1}{8} \times$ ....= 2

Proponé otras multiplicaciones cuyo resultado sea 2. ¿Cuántas multiplicaciones posibles hay?

6) Más problemas con rectángulos.

a) Ahora vamos a trabajar sobre rectángulos cuya área es $\frac{1}{2}$ m². Si la base mide $\frac{1}{4}$ m, ¿cuánto mide la altura? ¿Y si la base mide 4 m? ¿Y si la base mide 3 m, cuánto mide la altura sabiendo que el área es de $\frac{1}{2}$ m²?

b) Completá la siguiente tabla en la que se relacionan la base y la altura de un rectángulo cuya área es $\frac{1}{2}$ m²:

Base (m)	$\frac{1}{4}$	4	1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
Altura (m)									

7) Ya aprendiste que $3 \times \frac{1}{3} = 1$; $4 \times \frac{1}{4} = 1$; $5 \times \frac{1}{5} = 1$ y también que $\frac{1}{5} \times 5 = 1$, $\frac{1}{6} \times 6 = 1$, etc. O sea, sabés por cuánto hay que multiplicar un número entero para que el resultado sea 1 y también por cuánto hay que multiplicar una fracción de numerador 1 para que el resultado sea 1. Vamos a extender estas relaciones para indagar si es cierto que, dada cualquier fracción, siempre se puede multiplicar por otra de modo que el resultado de la multiplicación sea 1. Por ejemplo, ¿por cuánto hay que multiplicar $\frac{2}{5}$ para que dé 1?

8) ¿Por qué número tengo que multiplicar a 3 para obtener como resultado 2? ¿Cuántos números hay que cumplan esta condición?

9) Mariano y Romina, para resolver el problema anterior, discutieron lo siguiente:

Romina: "No hay un número natural que multiplicado por 3 dé 2".

Mariano: "Sí, puedo encontrar un número. Es más, si me dan dos números enteros, siempre puedo encontrar otro número racional que multiplicado por el primero me dé el segundo número".

¿Qué te parece lo que discutieron? ¿Quién tiene razón? ¿Estás de acuerdo con lo que dice Mariano? ¿Por qué?

10) Completar los siguientes espacios en blanco:

$2 \times \ldots\ldots\ldots = 7$ $\qquad$ $3 \times \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{5}$

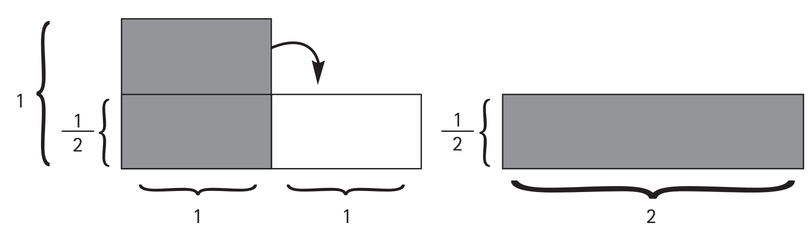
$\frac{1}{3} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{2}{7}$ $\qquad$ $\frac{1}{36} \times \ldots\ldots\ldots = 2$

$\frac{2}{15} \times \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{15}$ $\qquad$ $\frac{16}{3} \times \ldots\ldots\ldots = 16$

Análisis de los problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

En el problema 1 se puede comenzar con exploraciones partiendo del cuadrado de lado 1. ¿Cómo modificar el cuadrado para armar un rectángulo con igual área?

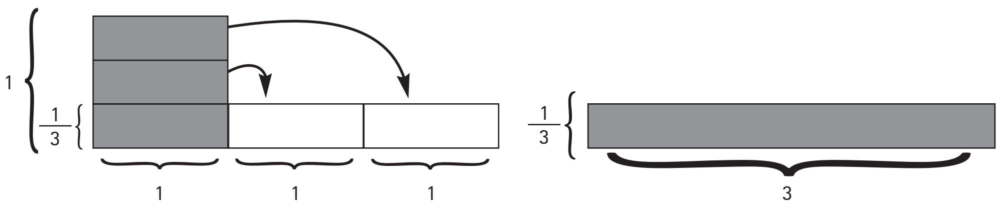
Una posibilidad es: si uno de los lados se reduce a la mitad, el otro lado tendrá que ser el doble para que el área siga siendo 1. Entonces se tiene:



Área del cuadrado = 1 x 1 = 1 $\qquad$ Área del rectángulo = $2 \times \frac{1}{2} = 1$

El área sombreada se mantiene constante.

Siguiendo con ese razonamiento, si a un lado se lo reduce a la tercera parte, el otro lado tendrá que ser el triple para que tenga igual área:



Área del cuadrado = 1 x 1 = 1 Área del rectángulo = 3 x $\frac{1}{3}$ = 1

Se podría armar una tabla con los pares de datos que se propongan, por ejemplo:

Base	Altura	Área = base x altura
1	1	1 x 1 = 1
2	$\frac{1}{2}$	2 x $\frac{1}{2}$ = 1
3	$\frac{1}{3}$	3 x $\frac{1}{3}$ = 1
4	$\frac{1}{4}$	3 x $\frac{1}{4}$ = 1
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$ x 2 = 1

De esta manera se comienzan a establecer algunas multiplicaciones que dan por resultado 1. Notemos que, desde otro punto de vista, el alumno reencuentra en esta actividad la definición de fracción: *n* veces $\frac{1}{n}$ es 1. En el problema 2, los alumnos tienen que identificar las multiplicaciones en juego en la situación anterior y en el problema 3 tienen que extender la relación en juego ($n \times \frac{1}{n} = 1$) a otros pares de números:

$\frac{1}{5}$ es una parte del entero tal que 5 veces esa parte da el entero, por tanto, 5 veces $\frac{1}{5}$ es igual a 1, o sea:

5 x $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ = 1

Análogamente, $\frac{1}{7}$ x **7** = 1.

En el problema 3 no se apunta a la resolución de ecuaciones, sino que interesa centrar la atención en la noción de inverso multiplicativo: un número natural *n*, multiplicado por la fracción $\frac{1}{n}$ da como resultado 1, y la fracción $\frac{1}{n}$, multiplicada por el número natural *n*, también da como resultado 1. Se dice entonces que $\frac{1}{n}$ es el inverso multiplicativo de *n* y, recíprocamente, *n* es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{n}$. Habrá que discutir con los alumnos que el 0 no tiene inverso multiplicativo y también habrá que contrastar con lo que sucede con los números naturales, en donde el único producto cuyo resultado es 1 es 1 x 1.

La realización de los tres problemas requerirá tiempo por parte de los alumnos: se trata de elaborar relaciones con las que probablemente todavía no estén familiarizados. No se espera que den los resultados de forma inmediata sino que exploren, ensayen, conjeturen. El análisis de los errores que se produzcan puede ser una fuente rica de nuevas relaciones.

A través de los problemas 4 y 5 se pretende extender las relaciones anteriores a productos que dan 2. Los alumnos pueden "pasar" por las relaciones anteriores o pueden pensar "directamente" en estos productos.

Efectivamente, por ejemplo, para saber por cuánto hay que multiplicar 4 para obtener como resultado 2, se puede pensar en cómo obtener el 1 y luego duplicar el factor. El razonamiento podría ser:

Si 4 por $\frac{1}{4}$ es 1, 4 por el doble de $\frac{1}{4}$ es 2; o sea, 4 x $\frac{2}{4}$ o bien 4 x $\frac{1}{2}$.

Pero también puede ocurrir que un alumno piense que 2 es la mitad de 4 y se dé cuenta "directamente" de que hay que multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Si ninguna de estas estrategias surgiera, serán modos de ayuda que podría implementar el docente.

En general, y en términos para los docentes, si $n \times \frac{1}{n}$ es 1, $n \times \frac{2}{n}$ es 2. Recíprocamente, si $\frac{1}{n} \times n$ es 1, $\frac{1}{n} \times 2n$ es 2. Esta es la idea que debería quedar explicitada al finalizar el problema 5.

Tal vez el docente pueda generalizarla y plantear, por ejemplo, que $n \times \frac{3}{n} = 3$, $n \times \frac{4}{n} = 4$, y también que $\frac{1}{n} \times 3n = 3$; $\frac{1}{n} \times 4n = 4$, etcétera.

A través del problema 6 se espera extender las relaciones producidas hasta el momento para multiplicaciones cuyo resultado es $\frac{1}{2}$. Las primeras propuestas pueden pensarse más directamente: probablemente los alumnos "sepan" que $\frac{1}{4}$ x 2 es $\frac{1}{2}$ y que 4 x $\frac{1}{8}$ también es $\frac{1}{2}$. Pueden aprovecharse estas relaciones "fáciles" para analizar que, si $\frac{1}{4}$ x 4 es 1 (relación vista en los primeros problemas), entonces $\frac{1}{4}$ por la mitad de 4 será $\frac{1}{2}$. Esta relación de proporcionalidad será útil para enfrentar casos más difíciles, por ejemplo, analizar por cuánto hay que multiplicar a 3 para obtener $\frac{1}{2}$:

Si 3 x $\frac{1}{3}$ = 1, entonces 3 x por la mitad de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{2}$, o sea, 3 x $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{2}$.

Puede ser que los alumnos hagan ensayos no muy dirigidos buscando los factores en cada caso. Será interesante retomarlos para mostrar un modo de hallarlos que "conduzca" más efectivamente a encontrar el factor buscado en cada caso. Los recursos que deben circular están ligados a la proporcionalidad.

Observemos que para llenar la tabla del problema 6 b) deben establecerse relaciones entre diferentes números de la tabla. Veamos.

Tomando como punto de partida el producto 1 x $\frac{1}{2}$ = 1, se puede hallar la altura del rectángulo de base 3 a través del siguiente razonamiento: si se triplica la base, entonces, para "conservar el área" la altura debe reducirse a la tercera parte (relación de proporcionalidad inversa); como la tercera parte de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{6}$, entonces 3 x $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{2}$.

Para hallar el correspondiente de $\frac{1}{3}$ también puede ser punto de apoyo la relación $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Efectivamente, como $\frac{1}{3}$ es la tercera parte de 1, hay que triplicar $\frac{1}{2}$ para "conservar el área". Por tanto, $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. A partir de esta relación se puede proponer hallar el correspondiente de $\frac{2}{3}$; como es el doble de $\frac{1}{3}$, su correspondiente será la mitad de $\frac{3}{2}$, o sea, $\frac{3}{4}$.

De manera similar, una vez hallado que el correspondiente de $\frac{1}{5}$ es $\frac{5}{2}$, se puede encontrar el correspondiente de $\frac{2}{5}$ y de $\frac{3}{5}$. Notemos que las relaciones de proporcionalidad inversa involucradas en esta tabla ya han sido tratadas a raíz de los primeros problemas de la secuencia.

Una vez completada la tabla será necesario reexaminar colectivamente todas las multiplicaciones obtenidas para tratar de hallar la "lógica" del algoritmo de la multiplicación de fracciones subyacente.

Retomemos, por ejemplo, la multiplicación $\frac{1}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. La multiplicación ya está hallada y la propuesta es analizarla para pensarla "de otro modo", tal vez más general:

$$\frac{1}{5} \times 5 = 1 \xrightarrow[\text{multiplicando por } \frac{1}{2}]{} \left(\frac{1}{5} \times 5\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{asociando el 5 con } \frac{1}{2}]{} \frac{1}{5} \times \left(5 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Un análisis similar puede hacerse para la multiplicación (también ya hallada) $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$.

Como ya ha sido analizado,

$$\frac{2}{5} \times 5 = 2 \longrightarrow \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1 \longrightarrow \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Si se multiplica el factor 5 por $\frac{1}{2}$, el resultado será la mitad de 2.	Si se multiplica el factor $\frac{5}{2}$ por $\frac{1}{2}$, el resultado será la mitad de 1.

La práctica que estamos proponiendo consiste en analizar los cálculos y transformarlos usando las propiedades de las operaciones. Los alumnos deben aprender a pensar en términos nuevos: “¿cómo me conviene transformar este cálculo para obtener lo que yo quiero?” En la medida en que los alumnos deben centrarse en las relaciones que plantea el cálculo y en que no alcanza con "mirar" el resultado sino que hace falta ir controlando todo el proceso y haciendo las transformaciones que "lleven" al resultado buscado, se trata de una práctica que prepara para el trabajo algebraico que los alumnos deberán enfrentar en la escuela secundaria.

El problema 7 apunta a generalizar la existencia de inverso multiplicativo para cualquier número racional.

Para el caso de $\frac{2}{5} \times$ ____ = 1, se puede pensar a $\frac{2}{5}$ como $2 \times \frac{1}{5}$, entonces como:

$\frac{1}{5} \times \mathbf{5} = 1$

se tiene

$$\frac{2}{5} \times \mathbf{5} = 2 \times \frac{1}{5} \times 5 = 2 \times 1 = 2$$

Y el problema pasa a ser ahora

2 x ....= 1, entonces $2 \times \frac{1}{2} = 1$

De esta manera y reconstruyendo estos cálculos se tiene

$$\underbrace{\frac{2}{5}} \times 5 \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} =$$

$$2 \times \underbrace{\frac{1}{5} \times 5} \times \frac{1}{2} =$$

$$\underbrace{2 \times 1} \times \frac{1}{2} =$$

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Y como $5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, se tiene

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$$

Del mismo modo pueden proponerse otras fracciones para que los alumnos indaguen la existencia de inverso multiplicativo.

A partir del análisis anterior serán propicias las condiciones para que el docente defina el inverso multiplicativo de un número racional.

Los números racionales tienen **inverso multiplicativo**; es decir, dado un número racional $\frac{A}{B}$, existe otro número racional que llamamos $\frac{B}{A}$ que cumple $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = 1$.

Es interesante señalar que cuando se trabaja con números naturales no existe el inverso multiplicativo.

Todo el trabajo realizado hasta el momento genera buenas condiciones para establecer el algoritmo de multiplicación de fracciones. Efectivamente, si se trata de realizar, por ejemplo, $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$, puede pensarse de la siguiente manera:

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = 4 \times \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{5} = 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$$

Los alumnos ya saben que multiplicar por $\frac{1}{5}$ es "hacer la quinta parte". La quinta parte de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{15}$. Resulta entonces que

$$8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = 8 \times \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

Si se analiza el proceso realizado, se podrá encontrar una explicación a la regla según la cual para multiplicar dos fracciones se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores. Si bien se ha trabajado con un ejemplo –y se pueden proponer varios– estos tienen un carácter genérico: son casos particulares que actúan como ejemplos del caso general. Aunque los alumnos ya hayan tratado la multiplicación de fracciones en sexto grado, será esta una oportunidad de revisitar la noción, encontrándole nuevas aristas tal vez no analizadas anteriormente.

El problema 8 invita a poner en funcionamiento las relaciones elaboradas.

Para "pasar" del 3 al 2, *conviene* usar el 1 como intermediario. Apoyados en el inverso multiplicativo se espera una resolución del tipo:

como $3 \times \frac{1}{3} = 1$, se tiene

$3 \times \frac{1}{3} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

Por tanto,

$3 \times \frac{2}{3} = 2$

Algunos alumnos pueden llegar a sorprenderse (todavía) porque al multiplicar 3 por un número se obtiene como resultado 2, que es "más chico". Será una nueva oportunidad para volver a discutir una idea muy arraigada en los alumnos, según la cual "multiplicar siempre agranda". La comparación entre el funcionamiento de los números naturales y el de los números racionales será el punto de apoyo para saldar esta duda.

La solución obtenida es única, pero puede escribirse de infinitas maneras fraccionarias ($\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, etc.) y también puede apelarse a una escritura decimal (en este caso, periódica 0,66666...). Es importante resaltar que todas las escrituras corresponden al **mismo** número racional.

Toda la actividad da lugar a plantear diferencias entre los distintos campos numéricos.

Mientras en los números racionales, dados a y b, siempre existe un c tal que a x c = b, no sucede lo mismo con los números naturales. Es interesante entonces comparar las soluciones en ambos conjuntos numéricos. Sería oportuno introducir en el análisis la posibilidad de que a o b sean iguales a 0. Una afirmación posible que puede quedar registrada para los alumnos sería la siguiente:

"Dados dos números naturales a y b, no siempre se puede encontrar un natural c tal que a x c = b. Para que exista, a tiene que ser divisor de b. En cambio, si a no es cero, siempre es posible encontrar un número racional c, de modo que a x c = b."

El problema 10 tiene el objetivo de ayudar a consolidar las relaciones establecidas. Se apunta a que los alumnos pongan en juego la estrategia de pasar por el 1 como intermediario, pero que también puedan apelar a estrategias específicas en función de los números en juego.

Así, para "pasar" de un entero a otro, la estrategia sería usar el inverso multiplicativo para "llegar" a 1 y luego multiplicar por el número que se pide como producto. Por ejemplo, para establecer por qué número hay que multiplicar a 2 para obtener 7, la idea es multiplicar 2 por $\frac{1}{2} \times 7$, es decir, por $\frac{7}{2}$:

$2 \times \_\_\_\_ = 7 \longrightarrow 2 \times \frac{1}{2} \times 7 = 7 \longrightarrow 2 \times \frac{7}{2} = 7$

Para "pasar" multiplicando de 3 a $\frac{1}{5}$, habrá que multiplicar por $\frac{1}{3}$, y sucesivamente por $\frac{1}{5}$, o sea, por $\frac{1}{15}$.

Para "ir multiplicando" desde $\frac{1}{3}$ hasta $\frac{2}{7}$, habrá que multiplicar por 3, y sucesivamente por $\frac{2}{7}$, o sea, por $\frac{6}{7}$:

$\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{2}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

En este oportunidad será interesante analizar que $\frac{6}{21}$ y $\frac{2}{7}$ son equivalentes y que, cuando se aplica la regla de multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí, es posible que quede una fracción que se puede simplificar. En algunos casos, esa simplificación se puede anticipar porque los factores están explicitados en la multiplicación. Por ejemplo, al multiplicar $\frac{1}{3} \times \frac{6}{7}$ se "ve" que el 6 se puede simplificar con el 3. Es importante que los alumnos comprendan que esa simplificación se puede hacer antes o después de aplicada la regla y también es necesario discutir que, aunque no se simplifique, el resultado es igualmente correcto, no obstante se exprese con otra escritura.

Para el caso de

$\frac{16}{3} \times \_\_\_\_ = 16$, es interesante que los alumnos reparen en que si se multiplica por 3, se simplifican los "3" y el resultado que se obtiene es 16.

Como se dijo anteriormente, se espera hacer una primera aproximación a todas estas nociones, las cuales se continuarán profundizando a lo largo de los siguientes años.

Actividad 2 Fracciones decimales

Se retoman y reutilizan relaciones ya establecidas en el trabajo con números decimales.

Fracciones decimales
Problemas

1) ¿Entre qué números naturales se encuentran cada una de las siguientes fracciones?
Una vez que hayas identificado entre qué números las ubicarías, señalá de cuál de los dos está más cerca:

a) $\frac{120}{10}$

b) $\frac{35}{10}$

c) $\frac{48}{10}$

d) $\frac{105}{100}$

e) $\frac{1.000}{1.000}$

f) $\frac{1.100}{1.000}$

g) $\frac{1.500}{1.000}$

h) $\frac{273}{100}$

i) $\frac{147}{10}$

2) Para cada uno de estos pares de expresiones, indicá cuál es mayor:

a) $\frac{9}{100}$ — $\frac{1}{10}$

b) $10 \times \frac{3}{100}$ — $\frac{1}{10}$

c) $\frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ — 1

d) $\frac{20}{100} + \frac{8}{10}$ — 1

e) $\frac{75}{100} + \frac{200}{1.000}$ — 1

f) $\frac{3}{10} + 3 + \frac{500}{1.000}$ — 4

g) $\frac{45}{100} : 3$ — 1

h) $5 + \frac{18}{10} + \frac{9}{100}$ — $6 + \frac{99}{1.000}$

3) Ordená, de menor a mayor, las tres expresiones que aparecen en cada ítem:

a) $\frac{3}{10}$; $\frac{29}{100}$; $1 + \frac{2}{1.000}$

b) $\frac{425}{100}$; $2 + \frac{15}{10}$; $\frac{999}{1.000}$

c) $\frac{18}{10}$; $\frac{55}{100}$; $\frac{135}{1.000}$

4) Descomponé las siguientes fracciones en sumas en las que sólo haya números enteros y fracciones menores que 1:

a) $\frac{48}{10} =$

b) $\frac{595}{100} =$

c) $\frac{2.340}{1.000} =$

d) $\frac{207}{10} =$

e) $\frac{1.034}{100} =$

5) Revisá tus respuestas al problema anterior. ¿Es posible seguir descomponiendo esas sumas de manera que sólo queden números naturales y fracciones con denominador 10, 100 ó 1.000 y con numerador de una sola cifra? Por ejemplo, si tuvieras $\frac{273}{100}$, se podría descomponer: $2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$.

Análisis de los problemas 1, 2, 3, 4 y 5

A través de estos problemas se espera que los alumnos lleguen a considerar la descomposición de una fracción de denominador 10, 100 ó 1.000 en enteros, décimos, centésimos, milésimos, poniendo en juego relaciones entre estas diferentes subdivisiones de la unidad.

Por ejemplo, para el problema 1 se apunta a que en el caso b) se pueda descomponer $\frac{35}{10}$ en $\frac{30}{10} + \frac{5}{10}$ y como $\frac{30}{10}$ es igual a 3 enteros y $\frac{5}{10}$ no llega a ser un entero, la fracción $\frac{35}{10}$ se encuentra entre 3 y 4. Y como se encuentra a $\frac{5}{10}$ de 3 y a $\frac{5}{10}$ de 4, $\frac{35}{10}$ está a la misma distancia de ambos.

La riqueza del problema 2 radica en realizar una puesta en común de las distintas relaciones que los alumnos ponen en juego para hacer las diferentes comparaciones. Esto genera un conjunto de criterios que serán "patrimonio" de la clase y van "armando" un discurso colectivo basado en ciertas leyes con relación a los números decimales. Debería quedar claro que las relaciones de valor entre posiciones contiguas ($\frac{10}{10} = 1$; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $\frac{10}{1.000} = \frac{1}{100}$, etc.) constituyen un punto de apoyo fundamental en este caso. Así, por ejemplo, para el caso a) se puede pensar a $\frac{1}{10}$ como $\frac{10}{100}$ con lo cual queda claro que es mayor que $\frac{9}{100}$.

En otros casos pueden apelar a la escritura decimal, por ejemplo, el punto f) en el que $\frac{3}{10} = 0{,}3$ y $\frac{500}{1.000} = 0{,}5$, entonces $\frac{3}{10} + 3 + \frac{500}{1.000} = 0{,}3 + 3 + 0{,}5 = 3{,}8$ que es menor que 4.

El problema 3 pone en juego relaciones similares y apunta a lograr familiaridad con la escritura decimal y su relación con las fracciones decimales.

Estas relaciones se evidencian más estrictamente en los problemas 4 y 5. Estos resultarán un modo de "repasar" el significado de la escritura decimal: la primera posición después de la coma representa los décimos; la segunda, los centésimos, etcétera.

Actividad 3 Fracciones como cociente exacto entre números naturales

En *Matemática. Documento de trabajo nº 4*[4] se define: "Todo número que puede expresarse como cociente de dos números enteros con el divisor distinto de 0 es un número racional y para anotar este número puede usarse la forma fraccionaria o la forma decimal". En la siguiente actividad se espera volver a trabajar la noción de número racional como cociente de números enteros.

Fracciones como cociente exacto entre números naturales
Problemas

1) Una maestra propuso a los alumnos el siguiente juego:
"Pienso un número. Ustedes me proponen números y yo divido mentalmente esos números que ustedes me dicen por el número que yo pensé y les digo el resultado. Ustedes tienen, entonces, que encontrar el número que yo pensé".

Cuando los chicos propusieron	5	6	2		7
La maestra respondió	$\frac{5}{3}$	2		$\frac{1}{3}$	

a) ¿Cuál fue el número que pensó la maestra?
b) Completá la tabla.

2) Entusiasmados los chicos quisieron seguir jugando. Entonces Lorena se propuso como maestra. A continuación, te mostramos una tabla con los números que dijeron los chicos y con sus respuestas. ¿Qué número pensó Lorena?

Los chicos propusieron	2	1	10	5
Lorena respondió	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$

3) Encontrá, con la calculadora, cuentas de una sola operación, con números naturales, cuyo resultado sea 0,75.

Análisis de los problemas 1, 2 y 3

Como se dijo, se apunta a la conceptualización de los números racionales –fracciones y expresiones decimales– como cociente entre números naturales. Esta conceptualización se fue elaborando a lo largo del trabajo realizado con núme-

4 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, *Matemática, Documento de trabajo nº 4*, 1997.

ros racionales en los años anteriores y ahora se espera reflexionar para recuperar explícitamente esa relación.

En una primera instancia los alumnos pueden verse sorprendidos porque el resultado que les devuelve la maestra es una fracción. Ellos tienen que ir estableciendo que si 5 dividido un número da como resultado $\frac{5}{3}$, para recuperar el número original habría que pensar por qué número hay que multiplicar $\frac{5}{3}$ para obtener 5. Esa misma idea resulta más fácil analizando cuando los chicos proponen 6 y la maestra dice 2, lo cual permite establecer que el número pensado por la maestra es 3. El 3 "funciona" también si los chicos dicen 5 y la maestra dice $\frac{5}{3}$. De esta manera se pone en relación el cálculo 5 : 3 con la fracción $\frac{5}{3}$. Una manera de explicar esta relación podría ser concebir el cálculo 5 : 3 como (1 + 1 + 1 + 1 + 1) : 3 y apelar a que 1: 3 es $\frac{1}{3}$; resulta entonces que 5 : 3 es 5 veces $\frac{1}{3}$, o sea, $\frac{5}{3}$. De este modo se puede completar la tabla: 2 : 3 = $\frac{2}{3}$ y, en general, a: b = $\frac{a}{b}$. La idea de que la división **es** el número es una idea difícil y, aunque haya sido tratada en años anteriores, resulta interesante que los alumnos vuelvan a pensarla ahora con más elementos.

La tabla del problema 2 vuelve a proponer pares de números relacionados por una operación de dividir. Los alumnos deberán usar algún par como punto de apoyo para establecer cuál es el divisor en cuestión y luego verificar que dicho divisor "calza" bien con todos los pares propuestos en la tabla.

Puede ser que algunos alumnos todavía tengan cierta incertidumbre frente al problema 3. La idea es que lleguen a establecer, apoyados en los problemas anteriores, que la única cuenta posible es la división. Así pueden comenzar a proponer:

75 : 100   3 : 4   6 : 8

Será interesante analizar entre todos qué relación hay entre numerador y denominador del cociente expresado como fracción –en este caso 0,75– y el dividendo y divisor de la división que dio origen al resultado.

Como analizamos a raíz del problema anterior, la fracción $\frac{a}{b}$ se relaciona con la cuenta a : b, entonces el numerador de la fracción es el dividendo de la división y el denominador es el divisor. Una manera de pensar este cálculo es concebir el número natural *a*, como *a* veces 1 y realizar *a* veces 1: b que es $\frac{1}{b}$.

$$\frac{a}{b} \qquad\qquad a \;\begin{array}{|l} b \\ \hline \frac{a}{b} \end{array}$$

Y el cociente es el número $\frac{a}{b}$.

De la relación anterior surge también que $\frac{a}{b}$ x b = a.

El hecho de que los alumnos hagan divisiones no significa que tengan conciencia de que la única operación posible es la división. Algunos pueden sugerir sumas o restas. En ese caso, cuando se suman o restan números enteros, el resultado **siempre** es un número entero. Por tanto, no es posible.

Estos problemas ponen en juego un aspecto: la división exacta no siempre es posible en el conjunto de los números naturales. Los números racionales vienen a cubrir esta necesidad de la aritmética de dar sentido a cualquier división entre naturales –siempre y cuando el divisor sea distinto de 0.[5]

Actividad 4 Algunas cuestiones de la multiplicación por números decimales

Esta actividad permite poner en discusión una idea que, si bien ya ha sido tratada, persiste en las concepciones de los alumnos: multiplicar "agranda".

Algunas cuestiones de la multiplicación por números decimales
Problemas

1) Julián pensó un número, lo multiplicó por sí mismo y obtuvo como resultado un número menor. Como le resultó extraño, siguió ensayando con su calculadora. Descubrió que a veces, al multiplicar un número por sí mismo, se obtiene un número menor y que otras veces, esto ya era conocido para él, se obtiene un número mayor.
Luego se preguntó si habría un modo de anticipar qué sucedería sin necesidad de hacer efectivamente la cuenta.
¿Vos qué pensás?

2) Si a un número lo multiplico por 0,89, ¿se agranda o se achica? ¿Y si lo multiplico por 0,2? ¿Y por 1,003?

3) Colocar >, < ó = según corresponda, sin realizar las cuentas.

a) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ .... $\frac{1}{2}$

b) $4 \times \frac{1}{3}$ .... $\frac{1}{3}$

c) $2,5 \times \frac{3}{7}$ .... $\frac{3}{7}$

d) $2,5 \times \frac{3}{7}$ .... $2,5$

Análisis de los problemas 1, 2 y 3

Algunas cuestiones ya se pusieron en juego a raíz del problema 9 de la actividad 1 donde se proponía multiplicar 3 por un número y que el resultado fuera 2. En ese momento tal vez se dejó abierto el tema. A propósito de esta actividad se puede recordar que en esa oportunidad se encontró

$$3 \times \frac{2}{3} = 2$$

con lo cual se pudo establecer que no siempre multiplicar "agranda".

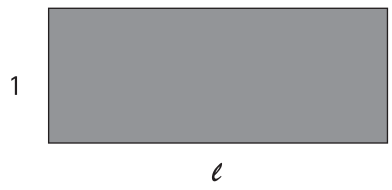
Ahora será necesario indagar bajo qué condiciones multiplicar "agranda" o "achica".

Será interesante permitir que los alumnos se tomen un tiempo para explorar y formular alguna conjetura. La calculadora puede constituir un buen auxi-

5 Este problema fue extraído de *Matemática, Documento de trabajo nº 4*, *op. cit.*

liar para "generar" ensayos. Un punto de apoyo podría ser: multiplicar por $\frac{1}{2}$ es encontrar la mitad, multiplicar por $\frac{1}{3}$ es encontrar la tercera parte, multiplicar por $\frac{1}{4}$ es encontrar la cuarta parte. De este análisis puede surgir la idea de que multiplicar por fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ "achica".

En general, si se considera una longitud cualquiera y se "toma" de esa longitud una fracción menor que 1, se obtiene una longitud menor que la original. Esta idea puede ser utilizada junto con la noción de área de un rectángulo que ya ha sido tomada como referencia para representar la multiplicación. Efectivamente, consideremos un rectángulo de una base de cualquier longitud ℓ y altura 1. Su área es ℓ.



Si ahora consideramos un rectángulo de la misma base y altura menor que 1, es evidente que el área del rectángulo será menor que el área del rectángulo original, de modo que ℓ, multiplicado por un número menor que 1, será menor que ℓ (que era el área original).

El maestro puede aportar además el siguiente análisis: al multiplicar por 1 un cierto número, dicho número "queda" igual. El 1 funciona entonces como "límite" entre lo que agranda y lo que achica: si a un número se lo multiplica por un número menor que 1, el resultado de la multiplicación será menor que el número dado; en cambio, si se multiplica por un número mayor que 1, el resultado del producto será un número mayor que el número dado.

Problemas con números racionales

5 Actividad

En esta actividad se abordarán varios contenidos: la composición aditiva de una fracción a partir de otras fracciones, la fracción de una colección, la relación entre dos fracciones, el cambio de unidades de referencia.

Problemas con números racionales

Problemas

1) Expresé $\frac{3}{5}$ como $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ y también pude expresar $\frac{1}{2}$ como $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. De la misma manera, ¿será posible obtener $\frac{13}{5}$ como suma de décimos? ¿Y como suma de medios?

2) ¿Se podrá "armar" $\frac{17}{3}$ sumando solamente fracciones de denominador 18? ¿Y usando medios?

G.C.B.A.

3) Tengo $\frac{18}{4}$ kg de arroz en una bolsa grande y voy a armar paquetes de $\frac{1}{3}$ kg.

a) ¿Para cuántos paquetes enteros me alcanzará?

b) ¿Sobra arroz? ¿Cuántos kilos?

c) ¿Qué parte de la bolsa grande es el arroz que sobra? ¿Y qué parte es de un paquete?

4) En un club, las $\frac{2}{3}$ partes de un grupo de 36 chicas practican básquet, la cuarta parte de las restantes hace natación y el resto hace patín. ¿Cuántas chicas practican patín? ¿Qué fracción del total representan?

5) Jorge compró una computadora a $ 2.500 y la pagó de la siguiente manera: $\frac{2}{5}$ del total al contado y el resto con tarjeta de crédito en 5 cuotas iguales. ¿Cuánto debe pagar en cada cuota? Lo que paga en cada cuota, ¿qué parte es del total?

6) Se repartió una caja de alfajores entre Silvia, Patricia y Clarisa. Silvia se llevó $\frac{1}{5}$ del total, Patricia se llevó $\frac{3}{4}$ del total. De los que quedaban, Clarisa se llevó $\frac{3}{5}$. Si Clarisa se llevó 3 alfajores, ¿cuántos alfajores había en la caja?

7) Tengo una cinta de 87,6 cm para hacer moños. Para cada moño necesito 7,3 cm de cinta. ¿Cuántos moños puedo hacer?

8) Tengo un bidón con 7,4 litros de jugo y lo quiero servir en vasos de 0,30 litro, ¿cuántos vasos puedo llenar? El último vaso no quedó completo, ¿se puede saber qué cantidad de jugo entró en ese vaso?

Análisis de los problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8

Para los problemas 1 y 2 se apela a distintas composiciones de una fracción. Por ejemplo, como $\frac{1}{5}$ es igual a $\frac{2}{10}$, se puede armar $\frac{13}{5}$ como suma de décimos; sin embargo, $\frac{13}{5}$ no se puede descomponer como suma de "medios" ya que es igual a 2 enteros y $\frac{3}{5}$ y, si bien se pueden armar 2 enteros como suma de "medios", no es posible componer $\frac{3}{5}$ como suma de "medios" porque $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{2}$ es mayor.

Los intercambios en el espacio colectivo de esta actividad deberían llevar a discutir condiciones para que una cierta descomposición sea posible. Por ejemplo, ¿será cierto que si una fracción tiene denominador par, siempre se puede expresar como suma de “medios”? En este punto será interesante alentar la búsqueda de ejemplos y contraejemplos. En el caso propuesto, el enunciado es falso: $\frac{3}{4}$ tiene denominador par y no puede expresarse como suma de medios. En cambio, una fracción del tipo $\frac{1}{n}$ con n par, siempre se puede expresar como suma de medios y con n impar, nunca. El trabajo propuesto debería ir estableciendo algunas reglas "parciales". Por ejemplo:

- una fracción que una vez simplificada tiene denominador impar no puede expresarse como suma de "medios";
- siempre se puede expresar una fracción como suma de fracciones cuyo denominador es un múltiplo del denominador de la fracción original.

Obviamente no son reglas para que los alumnos recuerden. El objetivo es que formulen conjeturas y traten de probarlas de alguna manera. En esta actividad interesa el trabajo de producción de relaciones.

El problema 3 propone, al igual que los problemas anteriores, armar $\frac{18}{4}$ como suma de $\frac{1}{3}$. Una posible estrategia es pensar $\frac{18}{4}$ como 4 enteros y $\frac{2}{4}$. Será importante discutir con los alumnos que los enteros pueden armarse siempre con cualquier fracción del tipo $\frac{1}{n}$. Entonces quedaría por componer $\frac{2}{4}$ que es equivalente a $\frac{1}{2}$ y, nuevamente, como $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{2}{3}$, no se puede componer a $\frac{1}{2}$ como sumas de tercios. Por tanto, de ese medio restante se utilizará sólo $\frac{1}{3}$.

Como $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$, lo que sobra de arroz es equivalente a $\frac{1}{6}$ kg. La última cuestión propone analizar qué parte es $\frac{1}{6}$ de $\frac{18}{4}$. Una estrategia posible sería pensar los $\frac{18}{4}$ como $\frac{54}{12}$ y $\frac{1}{6}$ como $\frac{2}{12}$, entonces como se tiene que analizar cuántas veces entra $\frac{2}{12}$ en $\frac{54}{12}$ es lo mismo que pensar cuántos "de a 2" hay en 54, o sea, 27. En consecuencia, $\frac{1}{6}$ es la 27ava parte del paquete de $\frac{18}{4}$, o sea, $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{27}$ del paquete de $\frac{18}{4}$ kg.

El problema pregunta también qué parte del paquete es "lo que sobra". En términos numéricos hay que averiguar qué parte de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$. Dado que se trata de una relación relativamente fácil, es posible que los alumnos la calculen apelando a estrategias "caseras": $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$. No se está esperando formalizar el cálculo que permite establecer la relación entre dos cantidades fraccionarias de manera general.

El análisis muestra que el problema es complejo pero al mismo tiempo abordable con los elementos que los alumnos vienen trabajando. Habrá que alentar la exploración, dar tiempo suficiente y discutir las diferentes propuestas que surjan como un modo de ir clarificando las relaciones involucradas en el problema.

El problema 4 plantea la situación de coordinar dos unidades al mismo tiempo: el total de la colección y cada elemento de ella. Se trata de un problema en el que los alumnos deben ir "pasando" de una de estas unidades a la otra hasta establecer la cantidad solicitada. La última pregunta requiere que pongan en juego que, si hay 9 personas de 36 que practican patín, eso representa $\frac{9}{36}$ del total.

Será un buen momento para generalizar esta idea:
a elementos de un total de *b* elementos representan $\frac{a}{b}$ del total.

El problema 5 pone en juego relaciones similares a las del problema anterior.

El problema 6 es complejo y requiere varios "pasos". Los alumnos deben establecer qué parte de la caja se llevaron Silvia y Patricia (esto es $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{19}{20}$), a partir de ahí establecer que queda $\frac{1}{20}$, lo cual les exige saber que el total de la caja es $\frac{20}{20}$. Como Clarisa se llevó $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{20}$, se llevó $\frac{3}{100}$. Si $\frac{3}{100}$ corresponden a 3 alfajores, entonces 1 alfajor es $\frac{1}{100}$, por tanto, 100 alfajores es el total.

Es posible abordar el problema 7 de diferentes maneras: puede ser que los alumnos intenten sumar reiteradamente 7,3 hasta alcanzar 87,6, o puede ser que dividan manualmente o con calculadora. En la medida en que se apunta a que se establezcan relaciones que conduzcan a la solución, desde nuestro punto de vista el uso de la calculadora debería estar habilitado.

El problema 8 puede abordarse a través de sumas o multiplicaciones que aproximen cuántas veces "entra" 0,3 en 7,4. Si los alumnos utilizaran una división, el "asunto" será establecer el resto para conocer cuánto jugo (en litros) quedó en el vaso. En general, tienen dificultades para determinar ese resto. Efectivamente, si hacen la cuenta "a mano", muchas veces no tienen control del orden de magnitud del resto: frente a este procedimiento convencional

$$\begin{array}{r|l} 7,4 & \underline{\ 0,3\ } \\ 1\ 4 & \ \ 24 \\ 2 & \end{array}$$

suelen decir que el resto es 2 y no 0,2. El error proviene de no tener en cuenta que al aplicar el procedimiento de "tachar las comas" se está multiplicando dividendo y divisor por 10, con lo cual el cociente no se modifica pero el resto queda multiplicado por 10. Dar esa discusión resulta productivo más allá del algoritmo en sí: ubica a los alumnos en posición de reflexionar sobre un procedimiento y de detectar un error que es muy habitual.

Actividad 6

Números racionales en la recta numérica

La representación de números racionales sobre la recta numérica constituye un ámbito sumamente fructífero para poner en juego las relaciones construidas sobre estos números así como para construir otras nuevas.

No obstante, se reconoce la dificultad con la que se encuentran los alumnos para comprender esta representación: los números se anotan ordenados, conservando una escala que puede variar de una representación a otra; dicha escala se determina fijando el 0 y el 1 o, más generalmente, fijando la posición de dos números cualesquiera.

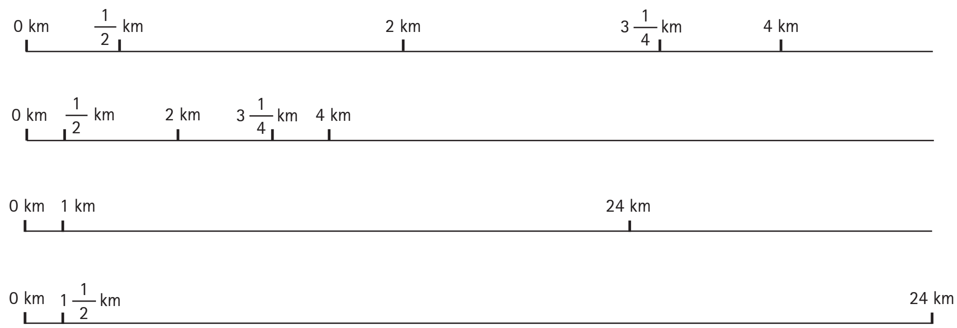
También subyace la idea de que un punto representa un número y que, además, ese punto representa una distancia al 0 en el caso de los números positivos. Por otro lado, un punto, es decir, un número admite diferentes escrituras.

Por todo esto, se propone iniciar el trabajo con rectas numéricas partiendo de situaciones que las contextualicen para descontextualizar posteriormente los conocimientos así construidos.[6] Teniendo en cuenta que los alumnos ya han trabajado con esta forma de representación, se inicia el trabajo invitándolos a que analicen las escalas en diferentes gráficos. Es decir, es una propuesta que supone ya una aproximación anterior al tema.

6 Cabe indicar que el tema de representación de números racionales en la recta numérica se comienza a trabajar a partir de 5º grado, y crece en complejidad en 6º y en 7º grado.

Números racionales en la recta numérica
Problemas

1) Para cada una de las rutas que aparecen a continuación tenés que decir si en las diferentes representaciones se respeta la escala o no, y explicar cómo es posible saberlo. Recordá que podés anotar otros puntos sobre las rectas si te ayudan para averiguarlo.



2) Representá una ruta que una la ciudad K con la ciudad L, con carteles que indiquen las siguientes distancias. Primero tenés que buscar una escala conveniente.

1 km ; 3 km ; $\frac{7}{4}$ km ; $\frac{13}{6}$ km

3) ¿Cuáles de las siguientes distancias se podrían incluir fácilmente en tu representación? ¿Por qué?

$\frac{5}{2}$ km $\frac{2}{3}$ km

Análisis de los problemas 1, 2 y 3

En la puesta en común, además de identificar las diferentes relaciones que se han tenido en cuenta para determinar la longitud asignada a 1 km para cada ruta, será interesante discutir cuál es la información mínima de la que es necesario disponer para poder determinar una escala: ¿cuántos puntos se necesitan?

En un principio se admitirán respuestas del tipo: "necesito el 0 y el 1" o "el 0 y otro punto cualquiera". Este análisis se retomará a propósito de rectas descontextualizadas. Será necesario en esta instancia dejar el terreno abonado para una reflexión posterior.

Esta primera parte de la actividad también será propicia para analizar la relación de proporcionalidad directa involucrada en cada escala. Por ejemplo, a la hora de decidir en el problema 1 si las escalas están bien utilizadas, podrían hacerse tablas del siguiente tipo:

Distancia en la recta (en cm)	$1\frac{1}{4}$	5	$8\frac{1}{10}$	10	
Distancia en el camino real (en km)	$\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{4}$	4	

Del análisis de la tabla que recoge las informaciones de la primera recta podemos ver que los puntos que marcan $\frac{1}{2}$ km, 2 km y 4 km están en la misma escala, ya que, si con $1\frac{1}{4}$ de cm en la recta se representa $\frac{1}{2}$ km del camino real, para representar 2 km, que es 4 veces la distancia inicial, se usará 4 veces $1\frac{1}{4}$, o sea, 5.

Del mismo modo, 4 km es el doble de 2 km, entonces se usarán 10 cm para su representación en la recta.

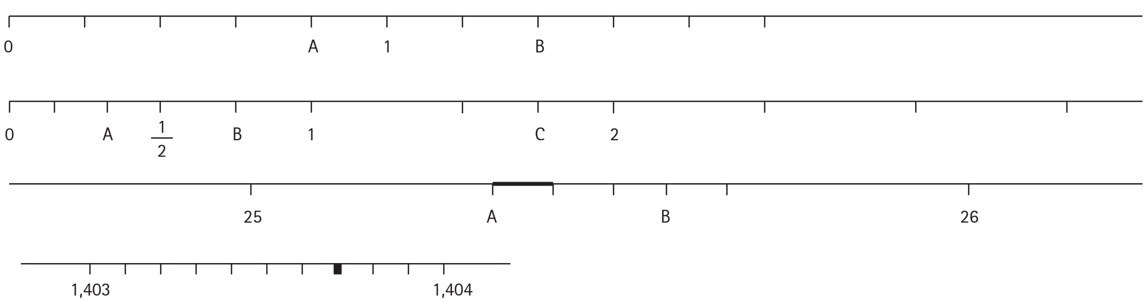
Para representar $3\frac{1}{4}$ de km se podría primero averiguar cuántos centímetros en la representación a escala corresponden a 1 kilómetro real. A 1 km le corresponde la mitad de lo que le corresponde a 2 km, o sea, $\frac{5}{2}$ cm o $2\frac{1}{2}$ cm (mitad de 5 cm). Esto permite establecer que 3 km reales se representan con $2\frac{1}{2}$ cm + $2\frac{1}{2}$ cm + $2\frac{1}{2}$ cm = $7\frac{1}{2}$ cm.

Asimismo, lo que le corresponde a $\frac{1}{4}$ de km es la mitad de lo que le corresponde a $\frac{1}{2}$ km, o sea, $\frac{5}{8}$ de cm. Entonces el punto correspondiente a $3\frac{1}{4}$ estaría a $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = 8\frac{1}{8}$ cm y no $8\frac{1}{10}$ cm.

Números racionales en la recta numérica

Problemas

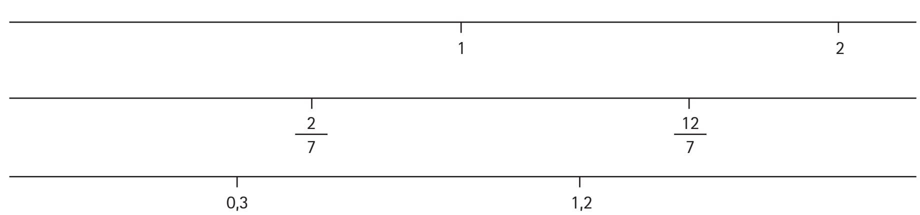
4) Indicá en cada caso qué número representa en la recta el punto señalado.



5) En cada uno de los siguientes casos, encontrarás dos o tres números. Tenés que elegir en cada caso una escala conveniente para poder representar esos números.

a) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{3}$ c) $\frac{15}{5}$; $\frac{15}{7}$ d) 1,2; 1,58; 2,01 e) 2,5; 3,4; 4,6

6) En las siguientes rectas se han representado números. A partir de estos números, ¿podemos señalar dónde estarán el 0 y el 1?



ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6

En esta instancia se comienza un trabajo con recta numérica descontextualizado.

Para el problema 4, en la primera recta, como la unidad está representada y a su vez la recta está dividida en partes iguales, la ubicación de los puntos A y B es bastante directa.

En las rectas que siguen, como la unidad no está partida en partes iguales, la ubicación de los puntos es más compleja.

En el caso de la segunda recta, A resulta ser $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$. Se podría establecer primero que se tiene dividido el segmento que representa $\frac{1}{2}$ en tres partes iguales, cada parte representa $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, es decir, $\frac{1}{6}$ de la unidad; por tanto, A representa $\frac{2}{6}$.

En cambio, para ubicar B, se puede analizar que B es $\frac{1}{2}$ del segmento que va desde $\frac{1}{2}$ hasta 1, es decir, es $\frac{1}{2}$ de una parte que representa $\frac{1}{2}$ de la unidad. Por tanto, de $\frac{1}{2}$ a B se tiene $\frac{1}{4}$ de unidad, entonces B va a representar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de la unidad. De esta manera se pone en evidencia que B representa $\frac{3}{4}$ de la unidad aunque no se tiene la unidad partida en cuatro partes iguales.

En la tercera recta es necesario señalar primero que no se tiene la recta desde el 0, sino que se está trabajando con otro "tramo" de la recta. Esto es algo que exige profundizar el concepto de escala. Obviamente, la tarea es más compleja.

Para hallar la ubicación de A, será necesario establecer que la distancia entre 25 y A es $\frac{1}{3}$ y que la zona sombreada es $\frac{1}{12}$ de la unidad.[7]

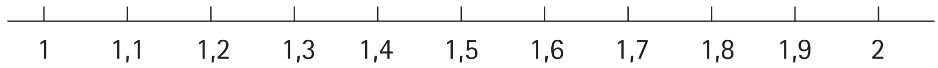
La cuarta recta pone en juego la representación de números decimales. Los alumnos deberán establecer que desde 1,403 hasta 1,404 hay 1 milésimo y que el intervalo está partido en diez partes iguales. Al no "mostrar" el 0 y al establecer una distancia que representa 0,001 en lugar de 1, este problema resulta difícil para los alumnos. Como el intervalo de $\frac{1}{1.000}$ está partido en 10, cada "rayita" representa una distancia de $\frac{1}{10.000}$. Así el primer punto señalado es 1,4031; el que le sigue representa 1,4032; y así hasta llegar al punto A que es 1,4039.

Seguramente el problema generará incertidumbre y muchos intercambios. Sólo en esas condiciones pensamos que este será un trabajo fecundo. En otros términos, no podríamos esperar de manera alguna que los alumnos establezcan de forma inmediata las relaciones involucradas.

Creemos que plantear cuestiones complejas y dar tiempo para que los alumnos las piensen, desafiarlos a "que arriesguen" respuestas para confrontarlas luego con las de otros compañeros, son "acciones" que contribuyen a que construyan una posición autónoma con respecto al conocimiento. Tal vez, sea ese el mayor capital que la escuela les puede brindar.

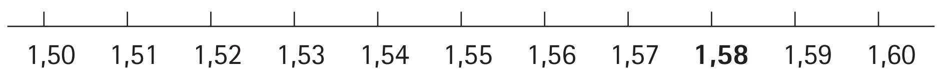
El problema 5 supone la elección de la escala más conveniente para representar el grupo de números en la misma recta. Por otro lado, la ubicación de números decimales en la recta numérica pone en juego las relaciones entre enteros, décimos, centésimos, etc. Así para ubicar, por ejemplo, 1,58, se puede pensar como 1 + 0,5 + 0,08, entonces será necesario dividir en 10 partes iguales el segmento de 1 a 2.

7 Parte de estos problemas fueron extraídos de *Matemática, Documento de trabajo nº 4, op. cit.*



Así, dividido el entero en 10 partes iguales, cada parte se corresponde con $\frac{1}{10}$ ó 0,1. Luego será necesario tomar el segmento entre 1,5 y 1,6 y nuevamente dividirlo en 10 partes iguales donde cada una de esas partes ahora representa $\frac{1}{100}$ del entero, o sea, 0,01. En este caso, la elección de una buena escala es fundamental.

Es difícil para los alumnos entender que ellos deben tomar la decisión y que puede ser que sus compañeros tomen decisiones diferentes y de todos modos resuelvan bien el problema. Será entonces una oportunidad para establecer cuáles son los criterios para decidir si una cierta representación está o no bien hecha, ya que estos no se basan en "dibujos idénticos" sino en "conservación de relaciones":



El problema 6 pone en primer plano que la escala queda determinada por dos números cualesquiera y que no es necesario que esos números sean el 0 y el 1. La tarea de los alumnos será establecer la distancia entre los dos números dados en cada caso y los centímetros que se le asignan a esa distancia numérica en la representación gráfica. El primer caso es relativamente fácil y debería servir de punto de apoyo para los siguientes. Para encarar el segundo caso, tal vez sea bueno preguntar a la clase qué diferencia hay entre este segundo ejemplo y el primero: la comparación puede dar pistas para identificar una estrategia que probablemente se puso en juego de manera implícita. El tercer ejemplo tiene el propósito de "hacer funcionar" las estrategias reconocidas a raíz del ejemplo anterior.

Esta diversidad de problemas: ubicar puntos en la recta, decidir qué punto está señalado en la recta, trabajar a partir de la representación del 0 y del 1, trabajar a partir de la representación de 2 números cualesquiera, trabajar con "partes" de la recta en las que no se "muestra" 0, etc. son tareas que exigen repensar los números racionales, lo que, en consecuencia, enriquece la conceptualización. Ese es el sentido de haberlas incluido en este material.

Actividad 7 Fracciones en el contexto de la proporcionalidad

En esta actividad se abordan algunas constantes de proporcionalidad particulares: porcentaje, velocidad, escala; asimismo se avanzará sobre la repartición proporcional.

Las relaciones de proporcionalidad directa constituyen un contexto a partir del cual repensar aspectos sobre el funcionamiento de las fracciones.

Los problemas de proporcionalidad directa en los que la constante de proporcionalidad es un número racional ponen en funcionamiento un sentido para los números racionales, diferente del que se juega en los problemas de reparto y de medida. Efectivamente, se establece una relación entre dos conjuntos de números en los cuales las cantidades que se corresponden forman razones equivalentes. La constante de proporcionalidad funciona como un "operador" que transforma un elemento de uno de los conjuntos en su correspondiente en el otro. Esto permite tratar un nuevo "costado" de la noción de equivalencia de números racionales: en el contexto de medida, dos fracciones son equivalentes porque "representan la misma cantidad"; en cambio aquí, como veremos, representan la misma "relación" (por ejemplo, el mismo porcentaje o la misma velocidad).

Cabe señalar que los problemas que se proponen no "cubren" el tratamiento de la proporcionalidad directa en 7º grado. Se retoman cuestiones de proporcionalidad ya tratadas, haciendo énfasis en aspectos que profundizan el conocimiento de los números racionales.

Fracciones en el contexto de la proporcionalidad
Problemas

1) Por cada tres alumnos de una clase que fueron a un viaje, dos se quedaron. ¿Qué parte de la clase no realizó el viaje?

2) Para preparar 1 kg de dulce de durazno se necesitan $1\frac{1}{2}$ kg de duraznos maduros y $\frac{5}{4}$ kg de azúcar.

a) ¿Cuántos kg de duraznos y de azúcar se necesitarán para preparar $1\frac{1}{2}$ kg de mermelada?

b) Si tengo $2\frac{1}{4}$ kg de durazno, ¿cuántos kilos de azúcar necesito para hacer mermelada? ¿Cuántos kilos de mermelada obtengo?

3) En un negocio, el paquete de 125 gr de jabón en polvo cuesta $ 2,5 y, en otro, el paquete de 300 gr de jabón de la misma marca cuesta $ 5,10. ¿En cuál de los dos negocios es más barato el jabón?

4) Para hacer naranjada, se mezclan 12 vasos de jugo puro con 9 vasos de agua. Si se quiere hacer naranjada pero conservando el mismo gusto, ¿cómo se podrá preparar? ¿Y si se quiere hacer más naranjada con el mismo gusto?
Si se quiere conservar el gusto, ¿cuántos vasos de agua habrá que poner para 5 vasos de jugo puro?, ¿cuántos vasos de jugo puro para 8 vasos de agua?
Si a una mezcla de 4 vasos de jugo puro con 3 vasos de agua se le agrega un vaso de jugo puro y un vaso de agua, ¿se obtiene jugo del mismo gusto?, ¿más concentrado?, ¿menos concentrado?

5) Un automóvil recorre 45 km en 17 minutos y otro recorre 55 km en 27 minutos. ¿Cuál va a mayor velocidad?

6) Un automóvil recorre 97 km en 48 minutos y otro recorre 170 km en una hora y media. ¿Cuál va a mayor velocidad?

7) Comparar las velocidades:
120 km/h, 2 km/min, 33 m/s.

8) Entre enero y julio los precios aumentaron $\frac{1}{5}$ de su valor. Completá la tabla que indica los precios en enero y los precios en julio.

Precios en enero ($)	100	20	30	60	80
Precios en julio ($)					

9) En un negocio, el precio de venta se calcula añadiendo 35 % al precio de costo. ¿Cuál es el precio de venta de un televisor cuyo costo es de $ 750?

G.C.B.A.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Y 9

El problema 1 plantea el análisis de un tipo de formulación que suele ser difícil para los alumnos. Acá hay tres relaciones en juego: la proporción sobre el total de los que realizaron el viaje ($\frac{3}{5}$), la proporción sobre el total de los que no realizaron el viaje ($\frac{2}{5}$) y la relación entre los que no realizaron el viaje y los que sí lo realizaron ($\frac{2}{3}$). El denominador 5 proviene de seleccionar una especie de "unidad mínima" que permite establecer que si el total de la clase fuera de 5 personas, 2 no habrían realizado el viaje y 3 sí. Este "total mínimo" no está explicitado en el enunciado y por eso resulta difícil para los alumnos reconocerlo. Las tres relaciones en juego suelen confundirse y será necesario hablar en la clase del significado de cada una de ellas.

El problema 2 exige coordinar tres relaciones de proporcionalidad directa en simultáneo: entre la cantidad de mermelada y la cantidad de durazno, entre la cantidad de mermelada y la cantidad de azúcar, y entre la cantidad de durazno y la cantidad de azúcar. Al estar fijados los valores de azúcar y durazno para 1 kg de mermelada, cualquier otro valor correspondiente a una de las magnitudes en juego determina los correspondientes de las otras magnitudes. Es necesario discutir esto con los alumnos.

Si bien se manejan fracciones relativamente "fáciles", el problema requiere realizar varios cálculos. En este caso, la diversidad de estrategias posibles, basadas en diferentes propiedades de la proporcionalidad, actuarán unas como control de otras. Si los alumnos no pueden hacer los cálculos apelando a las constantes de proporcionalidad en juego, se los alentará a buscar valores intermedios para llegar a los resultados buscados.

También pueden ser diferentes las propiedades a las que se recurre. Por ejemplo, para calcular la cantidad de azúcar y de duraznos necesaria para hacer $1\frac{1}{2}$ kg de mermelada, ellos pueden multiplicar $1\frac{1}{2}$ (cantidad de duraznos para 1 kg) y $\frac{5}{4}$ (cantidad de azúcar para 1 kg) por $1\frac{1}{2}$, factor que permite "pasar" de 1 (dato de la mermelada para el cual se dan los valores de azúcar y durazno) a $1\frac{1}{2}$ (dato de la mermelada para el cual hay que hallar los valores de azúcar y durazno). Pero también resulta una estrategia aceptable calcular los valores correspondientes a $\frac{1}{2}$ kg de mermelada y luego sumar.

Una vez completada la tabla será importante identificar:

- la constante que permite "pasar" de un valor correspondiente a la cantidad de mermelada a su correspondiente cantidad de durazno ($1\frac{1}{2}$ kg de durazno por kg de mermelada); y
- la constante que permite "pasar" de un valor correspondiente a la cantidad de mermelada a su correspondiente cantidad de azúcar ($\frac{5}{4}$ kg de azúcar por kg de mermelada).

Se chequeará que, independientemente de las estrategias seleccionadas para hacer los cálculos, la aplicación de la constante **debe** funcionar.

Los problemas 3, 4, 5, 6, 7 y 8 requieren la comparación de constantes de proporcionalidad en diferentes contextos: precios, concentración de una sustancia, velocidad y escala. Cada uno de estos contextos plantea complejidades específicas debido a las unidades de medida utilizadas.

Más allá de las estrategias que los alumnos pongan en juego para hacer el cálculo efectivo en el problema 3 (serán diversas si se han habilitado diversos procedimientos para tratar la proporcionalidad directa), será necesario que el docente analice y explique en clase el significado de los cocientes.

$$\frac{\$\ 2{,}5}{125\ \textit{gramos}} \quad \text{y} \quad \frac{\$\ 5{,}10}{300\ \textit{gramos}}$$

En el primer caso, el cociente significa $ 0,02 por gramo y en el segundo $ 0,017 por gramo. Insistimos en señalar que, aunque no sean estas las estrategias utilizadas para establecer la comparación, los alumnos deben comprender estos cálculos que conciernen simultáneamente al concepto de constante de proporcionalidad y de razón. La relación entre las distintas estrategias puestas en juego y estos cocientes es parte de la comprensión del concepto de proporcionalidad a la que tendrían que acceder al terminar su escuela primaria.

Más allá de las estrategias que los alumnos utilicen, el problema 4 pone en juego el concepto de razón: cada 4 vasos de jugo puro se agregan 3 vasos de agua. Analicemos la siguiente tabla que puede ser completada apelando a diferentes propiedades de la proporcionalidad directa:

Cantidad de vasos de jugo puro	4	8	12	16	3	$5\frac{1}{3}$	$10\frac{2}{3}$	1	5
Cantidad de vasos de agua	3	6	9	12	$2\frac{1}{4}$	4	8	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{4}$

Los pares de números que se corresponden en la tabla ($\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, etc.) determinan fracciones equivalentes. En este contexto, la equivalencia representa la conservación del gusto del jugo y no la cantidad de jugo: 12 vasos de jugo puro con 9 vasos de agua permiten hacer más cantidad de naranjada que 4 vasos de jugo puro con 3 vasos de agua, pero en ambos casos la concentración de jugo y, por tanto, el gusto es el mismo.

Muchos alumnos sostienen que, si se suma un mismo número al numerador y al denominador de un número racional, se obtiene un racional equivalente. La última pregunta del problema es una oportunidad para plantear una discusión acerca de esa "regla". Algunos sostendrán que se mantiene el gusto. Será necesario que los alumnos justifiquen sus afirmaciones; al hacerlo podrán apelar a diferentes relaciones que permitirán comprender por qué no se conserva la equivalencia al sumar 1 al numerador y al denominador.[8]

En los problemas 5 y 6 se trabaja con una constante de proporcionalidad con nombre propio: la velocidad que es el cociente entre espacio recorrido y tiempo de marcha. En el problema 5, en las dos relaciones que se comparan se utilizan

8 Tanto el problema como gran parte del análisis fueron extraídos de *Matemática, Documento de trabajo nº 4, op. cit.*

las mismas unidades, con lo cual se puede apelar a comparar los cocientes $\frac{45}{17}$ y $\frac{55}{27}$. Será importante recalcar que, aunque la segunda fracción se obtiene sumando 10 al numerador y al denominador de la primera, las fracciones no son equivalentes. Se vuelve a proponer la discusión sobre una cuestión que ya ha sido tratada en el problema anterior.

En el problema 6 se usan diferentes unidades de tiempo en las dos relaciones involucradas. Esto inhibe la posibilidad de comparar las constantes directamente: habrá que hacer primero un cambio de unidades (ya sea pasar los minutos a horas, ya sea las horas a minutos). La comparación de los dos problemas permitirá establecer las condiciones necesarias para comparar las velocidades apelando a los cocientes de cantidades que se corresponden.

En el problema 7 los alumnos tendrán que reutilizar las relaciones identificadas ya que las tres constantes están expresadas en diferentes unidades. Hacer el cambio de unidad es complejo porque requiere que tomen muchas decisiones. Tal vez sea necesario realizar uno de esos cambios colectivamente y dejar que los alumnos hagan el otro con menos intervención del docente.

Así, para expresar 2 km/min en km/h, el docente podrá proponer

1 minuto ⟶	2 km
60 minutos (1 hora)	60 x 2 = 120 km

Resulta entonces que 2 km/min es la misma velocidad que 120 km/h.

Relacionar esta velocidad con 33 m/s puede ser más difícil:

1 s	33 m
1 s	0,033 km
3.600 s	3.600 x 0,033 = 118,8 km

Dada la complejidad de estos problemas, es razonable esperar una diversidad de respuestas (correctas y no correctas). Se generan entonces buenas condiciones para discutir colectivamente cómo establecer criterios que permitan saber cuáles de las respuestas propuestas por los alumnos son correctas. Este proceso de elaboración de criterios para validar el trabajo es esencial para posicionar a los alumnos en una actitud que asuma la fundamentación como una parte esencial del trabajo matemático.

El problema 8 requerirá discutir qué significa "aumentar $\frac{1}{5}$ de su valor". Por ejemplo, si el precio es 100, al aumentar $\frac{1}{5}$ de su valor, aumenta \$ 20. El nuevo precio es \$ 120.

No es evidente para los alumnos que se "pasa" del precio viejo al nuevo multiplicando por $\frac{6}{5}$ (Precio inicial + $\frac{1}{5}$ del Precio inicial = $\frac{6}{5}$ del Precio inicial). Esto será objeto de discusión una vez que los niños hayan completado la tabla. Es decir, los alumnos pueden completar valor por valor sin reparar en que hay una constante multiplicativa que transforma el precio viejo en el nuevo precio. Este asunto puede constituirse en objeto de reflexión después de la resolución.

El problema 9 plantea una formulación diferente para la misma idea tratada en el problema anterior. Será importante establecer esa relación resaltando que el porcentaje es una fracción con denominador 100. Se podrá destacar que "aplicar un porcentaje" es aplicar una constante de proporcionalidad. Hallar el 35 % de 750 es multiplicar 750 por $\frac{35}{100}$ o hacer 0,35 x 750. En términos generales, y como información reservada al docente, para calcular el porcentaje de una cantidad hay que multiplicar esa cantidad por un número racional:
el A % de B es $\frac{A}{100} \cdot$ B.

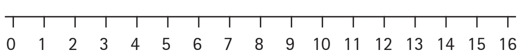
Fracción en el contexto de la medida

Actividad 8

Esta actividad pone en juego la siguiente idea: si múltiplos de un segmento se igualan con múltiplos de otro, hay una relación racional entre ellos. El trabajo de los alumnos será establecer esa relación.

Fracción en el contexto de la medida
Problemas de robots

1) Un robot A se desplaza dando pasos (todos de la misma longitud) sobre una recta como la siguiente:



a) El robot da dos pasos para ir del 3 al 6. Si está parado en el 9 y camina hacia la derecha, ¿pisará el 13?, ¿y el 15?

b) Dibujá un segmento que mida lo mismo que un paso del robot.

c) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al "punto" en el que se detiene?

d) ¿Cuánto mide el paso del robot A si se considera que la unidad es el segmento unidad de la recta?

Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A, aunque también sus pasos tienen siempre la misma longitud. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 3 al 4.

e) Si el robot B está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al "punto" en el que se detiene?

f) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto que pisan los dos robots?

g) ¿Se puede saber la relación entre los pasos de los dos robots?

2) El robot C da cuatro pasos para avanzar tres "números". Por ejemplo, para ir del 3 al 6, da cuatro pasos. Imaginate que C salió del 0 y llegó hasta el 18.
El robot D da pasos más chicos que C, pero si los dos salen de 0, D pisa en todos los puntos en los que pisó C. ¿Cuál puede ser la longitud de los pasos de D? ¿Hay más de una posibilidad? ¿Cuál es la longitud de los pasos de C?

3) El robot E da cuatro pasos para llegar desde el 0 hasta el 5. Si continúa caminando por la

G.C.B.A.

recta dando esos pasos, ¿pisa el $7\frac{1}{2}$? ¿Y el $8\frac{1}{2}$? ¿Cuánto miden los pasos de E?

4) A continuación, encontrarás los datos de algunos robots, que salen todos del 0.

G llega al 8 en 3 pasos
H llega al 12 en 15 pasos
I llega al 4 en 2 pasos
J llega al 7 en 4 pasos
K llega al 12 en 4 pasos
L llega al 8 en 10 pasos
M llega al 14 en 8 pasos
N llega al 12 en 6 pasos
O llega al 18 en 9 pasos

Ordená los robots según la longitud de sus pasos.
Para cada uno de los robots, proponé qué número pondrías en el punto de la recta en el que da la primera pisada (siempre considerando que salen desde el 0).

5) Un robot X da 9 pasos para llegar del 0 al 2 y otro robot Y da 3 pasos para llegar del 0 al 2. ¿Es verdad que X pisa en todos los lugares en los que pisa Y? ¿Cuál es la longitud de los pasos de X? ¿Y la de los pasos de Y?

Análisis de los problemas 1, 2, 3, 4 y 5

La tarea de los alumnos es en primer lugar establecer la longitud de los pasos de los robots, sabiendo que avanzan una cierta cantidad Y de unidades en X pasos. Si el robot A, por ejemplo, da dos pasos para pasar de 3 a 6, entonces dos pasos equivalen a 3 unidades; es decir que un paso equivale a 3 : 2, que es $\frac{3}{2}$ de la unidad. Si el robot da dos pasos y "salta" 3 unidades, cuando da un paso, "salta" $1\frac{1}{2}$ unidad. Entonces, si está en el 6 y da dos pasos, llega al 9; y si da dos pasos más, llega al 12; y si da un paso más, llega al $13\frac{1}{2}$. Pero si está en el 12 y da dos pasos, "salta" 3 unidades y llega al 15. En términos generales para el docente, si con m pasos se avanzan p unidades, el paso es $\frac{p}{m}$ de la unidad.

Por ejemplo:

- Para el robot B, dos pasos equivalen a 1 unidad (pasa del 3 al 4), entonces un paso es $\frac{1}{2}$ de unidad. Y si está parado en el 3 y da un solo paso, estará en $3\frac{1}{2}$.
- Como el robot A da pasos de longitud $1\frac{1}{2}$ y el robot B da pasos de longitud $\frac{1}{2}$, tres pasos del robot B equivalen a un paso del robot A.

Los alumnos pueden apoyarse en las representaciones gráficas para establecer estas relaciones.

La idea al trabajar todos los problemas de la secuencia es ir promoviendo que propongan argumentaciones apoyadas en los conocimientos con los que cuentan.

Por ejemplo, en el problema 4, como el robot K llega al 12 en cuatro pasos, entonces cada paso es 12 dividido 4; es decir, 3. Si J llega al 7 en cuatro pasos, cada paso es 7 dividido 4 y es el número $\frac{7}{4}$.

Como conclusión de las relaciones establecidas por los alumnos, se podría definir la longitud del paso de cada robot:

- si se dan tres pasos en 4 unidades, la longitud del paso es 4 dividido 3, o sea, $\frac{4}{3}$;
- si se dan siete pasos en 5 unidades, la longitud del paso es $\frac{5}{7}$;
- etcétera.

Para el problema 4 también pueden surgir varias estrategias para comparar. Por ejemplo:

- Si K llega al 12 en cuatro pasos y H llega al 12 en quince pasos, entonces el paso de H es más chico porque necesita más pasos.
- Otra posibilidad es determinar la medida de cada paso y comparar fracciones. El paso de K es $\frac{12}{4}$ y el paso de H es $\frac{12}{15}$; y $\frac{12}{4}$ es más grande que $\frac{12}{15}$.

Para el problema 5 se puede establecer la relación de los pasos de X e Y con la unidad, X es $\frac{2}{9}$ de la unidad e Y es $\frac{2}{3}$ de la unidad.

También es posible establecer la relación entre los pasos de X y de Y, pues cada paso de X es la tercera parte del paso de Y. Es decir, un paso de Y son tres pasos de X.

Densidad de los números racionales

9 **Actividad**

Se comenzará a trabajar la densidad de los números racionales: entre dos números racionales cualesquiera siempre es posible encontrar otro número racional, distinto de los dos primeros.

Se realiza una primera aproximación a la noción mencionada a partir de expresiones decimales ya que esta notación resulta más accesible para tratar el tema. Luego, se propone trabajar la densidad de las fracciones.

La noción de que hay infinitos números entre dos números dados, no importa cuán cerca se encuentren, es una noción difícil de atrapar. Se espera que a partir del trabajo los alumnos puedan tener una primera aproximación a esta noción cuyo estudio profundo corresponde al ciclo secundario.

1) Matías y Diego juegan a "Quien no pasa la línea".

Matías parte del 0 y siempre debe sumar un número. Diego parte del 1 y siempre debe restar un número.

Matías no puede llegar a un número mayor que el de Diego, de lo contrario pierde. Diego no puede llegar a un número menor que el de Matías, de lo contrario pierde.

Estas son las primeras jugadas:

Matías	Diego
$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
+ 0,1 =	- 0,1 =
+ 0,1 =	- 0,1 =
+ 0,02 =	- 0,1 =
+ 0,005 =	- 0,05 =
+ 0,0005 =	- 0,09 =

a) ¿A qué número llegó cada uno de los participantes?

b) ¿Puede Matías agregar 3 números más sin perder? ¿Y Diego?

2) Susana y Mirta estaban jugando a adivinar un número.

Susana pensó un número y le dio pistas a Mirta del número que estaba pensando. Susana comentó: "El número que estoy pensando está entre 1,5 y 1,6".

Mirta le contestó: "¡Eso es imposible! No hay un número entre 1,5 y 1,6".

¿Es cierto lo que dice Mirta? ¿Se puede adivinar el número que pensó Susana?

En otro momento Susana volvió a decir: "El número que yo pienso está entre 1,58 y 1,59". ¿Cuál puede ser el número que pensó Susana? Con las pistas que da Susana, ¿se puede adivinar el número que pensó?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1 Y 2

Frente al primer problema, los alumnos quedan sorprendidos cuando se dan cuenta de que pueden seguir sumando números sin superar uno dado. La idea es que reparen en que los números a sumar pueden hacerse "muy chiquitos" de modo de controlar que la suma (o la resta) "no se pase". Si los alumnos no pueden inicialmente darse cuenta de qué números sumar (o restar), el maestro puede proponer algunos casos. La experiencia nos muestra que, cuando "descubren" la densidad, se quedan impactados y sienten cierto placer en seguir buscando números que se suman y cuyo total no sobrepasa un cierto número dado.

De esta manera, se podría comenzar a trabajar con los alumnos la idea de que siempre hay un número "más chico" que uno dado y que serviría para seguir "sobreviviendo" en el juego.

Apelar a las unidades de medida puede resultar un recurso para avanzar en el problema 2. Otra estrategia factible es pensar 1,5 y 1,6 como 1,50 y 1,60, y de esta manera encontrar 1,51; 1,52; 1,53; 1,54; 1,55; 1,56; 1,57; 1,58 y 1,59. Esta estrategia puede constituirse en punto de apoyo para el trabajo posterior.

En la segunda parte del problema 2 y apoyados en las estrategias anteriores, los alumnos pueden pensar 1,58 y 1,59 como 1,580 y 1,590. Se comenzará a plantear, a partir de esta parte del problema, que este "truco" se puede aplicar cuantas veces sea necesario.

Densidad de los números racionales
Problemas

3) Encontrá 5 números que estén entre 2 y 3.

4) Encontrá 5 números que estén entre 2,5 y 3.

5) Encontrá 5 números que estén entre 2,7 y 2,8.

6) ¿Cuántos números hay entre 1,03 y 1,05?

7) ¿Cuántos números hay entre 2,03 y 2,04?

Análisis de los problemas 3, 4, 5, 6 y 7

Este grupo de problemas apunta a continuar trabajando con las estrategias sistematizadas en los problemas 1 y 2, pero de una manera descontextualizada. La idea de "achicar" cada vez más el intervalo en el que se propone encontrar números obedece a la necesidad de que los alumnos tengan que pensar en números con "varios" lugares después de la coma. Para esto, deberán desprenderse de la referencia a las unidades de medida y conceptualizar los números como tales. Se sugiere plantear esta discusión: aunque en la "práctica" sea "raro" concebir, por ejemplo, el número 4,008876, dicho número "existe".

Será interesante que se socialicen las estrategias –y los números propuestos– para los problemas 3, 4 y 5, de modo de que puedan ser utilizados como apoyo para los problemas 6 y 7.

Para el problema 7 nuevamente se puede proponer la estrategia de agregar un 0 "a la derecha" del número decimal ya que sigue siendo "el mismo" número; es decir, pensar que entre 2,03 y 2,04 están 2,031; 2,032; 2,033; 2,034; 2,035; 2,036; 2,037; 2,038 y 2,039. Pero a cada uno de estos números se le puede agregar nuevamente un 0 en el lugar de los diezmilésimos y de esta manera encontrar "más" números entre cada uno de ellos.

De ese modo se pone en juego que este procedimiento se puede hacer "siempre", donde este "siempre" está indicando que es "infinito".

La noción de infinito es compleja y, aunque en la clase se hable de ella, cada alumno tendrá una interpretación a la que el maestro le resultará difícil acceder. Proponer estrategias que se pueden aplicar indefinidamente contribuye a que los alumnos elaboren dicha noción.

Densidad de los números racionales
Problemas

8) Encontrá fracciones que estén entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

9) Encontrá fracciones que estén entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

10) ¿Cuántas fracciones hay entre 17 y 18?

11) ¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$?

12) ¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

Análisis de los problemas 8, 9, 10, 11 y 12

Como se dijo anteriormente, trabajar la densidad de los números racionales en su expresión fraccionaria es diferente de hacerlo con expresiones decimales. Aquí ya no es posible agregar un 0 a la izquierda del número sino que el trabajo se apoyará en buscar fracciones equivalentes con denominadores cada vez más grandes.

Se comienza planteando denominadores más "familiares" como lo son las potencias de 2. La idea de partición sucesiva "por la mitad" está en juego en el problema 8. Esta idea podrá reutilizarse en el problema 9 y también extenderse a un intervalo distinto del intervalo entre el 0 y el 1, como lo plantea el problema 10.

Finalmente se "convoca" a los alumnos a proponer particiones en tres, apelando a denominadores que son potencia de 3.

Las ideas expuestas se pueden generalizar a fracciones en las que los denominadores no "sean de la misma familia de potencias" como en los casos anteriores. Es el sentido del problema 12. Una posible estrategia es transformar $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ en fracciones equivalentes con denominador mayor, de modo de encontrar rápidamente fracciones intermedias. Se discutirá con los alumnos que este proceso se puede repetir indefinidamente, lo cual alimentará la conclusión de que existen infinitas fracciones entre dos fracciones dadas.

Densidad de los números racionales
Problemas

13) ¿Cuántas fracciones con denominador 3 hay entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{3}$? ¿Y cuántas con denominador 6? ¿Y con denominador 9?

14) ¿Cuántos números con dos cifras decimales hay mayores que 3,45 y menores que 4? ¿Y si se permite cualquier cantidad de cifras decimales?

Análisis de los problemas 13 y 14

La intención de estos problemas es poner de manifiesto que, si bien **siempre** existen infinitas fracciones entre dos fracciones dadas, hay una cantidad finita de fracciones con un determinado denominador. Por ejemplo, hay infinitas fracciones entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{3}$, pero si se requiere que las fracciones tengan denominador 6, sólo existen $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{12}{6}$ y $\frac{13}{6}$.

Comparar estas dos situaciones –en qué casos hay infinitas fracciones y en qué casos no las hay– ayuda a comprender la propiedad de la densidad de los números racionales.

Una situación similar ocurre cuando se trabaja con expresiones decimales: si el trabajo se restringe a números con una cantidad finita de lugares después de la coma, no será posible encontrar infinitos decimales entre dos números dados; pero, sin esa restricción, sí hay infinitos números decimales entre dos dados. Esta reflexión llama la atención sobre la necesidad de no referirse únicamente al contexto de la medida para analizar la noción de densidad. En efecto, cuando se trata de medir, es razonable concebir solamente 2 ó 3 cifras después de la coma. Como vimos, esto obtura la posibilidad de acceder a la noción de densidad.

Las ideas anteriores podrán afirmarse a través de un trabajo de análisis sobre el valor de verdad de algunas afirmaciones. Esto se propone en el problema siguiente.

Densidad de los números racionales
Problema

15) Discutir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Entre dos números enteros hay siempre un número fraccionario.
b) Entre dos números fraccionarios hay siempre un número fraccionario.
c) Entre dos números decimales hay siempre un número decimal.
d) Entre dos números fraccionarios hay siempre un número natural.

Análisis del problema 15

A continuación se revisa cada afirmación para encontrar posibles errores.

La afirmación a) no debería originar demasiada complejidad, pues los alumnos pueden llegar a plantear que entre 2 y 3 está 2,5, y entre 5 y 6 está 5,5, etcétera.

A partir del trabajo realizado, la validez de las afirmaciones b) y c) debería quedar para ser discutida con el conjunto de la clase.

Si bien la afirmación d) es falsa, dado que los alumnos han estado trabajando con "muchas fracciones" entre dos dadas, en un primer momento pueden afirmar que es verdadera. En este caso, el docente cuenta con varios ejemplos en los que esta afirmación no es verdadera, como $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, etcétera.

Se puede contrastar esta afirmación con la siguiente: *Dado un número natural, siempre se pueden encontrar dos fracciones que "encierren" el número.* Esto contribuirá a entender que si se considera un intervalo que contiene un número natural, seguro que en dicho intervalo hay fracciones, pero que un intervalo de números racionales no necesariamente contiene números naturales. Como hemos señalado, la confrontación entre números naturales y números racionales es permanentemente fuente de nuevas ideas.

Se estaría en condiciones de enunciar la propiedad de densidad de los números racionales. Una forma posible podría ser:

Entre dos números racionales (fracciones o números decimales) **siempre** *existe otro número racional distinto de los dados. Esta propiedad se llama* **densidad** *de los números racionales.*

Actividad 10 Expresiones decimales finitas y periódicas

Se espera establecer que no todas las fracciones pueden escribirse en forma decimal con una cantidad finita de cifras después de la coma. Los alumnos deberán llegar a la conclusión de que esto depende de la posibilidad de expresar o no la fracción como una fracción con denominador potencia de 10. Este trabajo se apoyará fuertemente en la tarea realizada por los alumnos a propósito de fracciones decimales.[9]

EXPRESIONES DECIMALES FINITAS Y PERIÓDICAS
PROBLEMAS

1) Anticipá cuántos lugares después de la coma tendrán los siguientes números escritos en forma decimal:

$\frac{7}{5}$ $\frac{7}{50}$ $\frac{85}{2}$ $\frac{85}{8}$ $\frac{7}{4}$

2) Silvia estableció la siguiente regla: "Todas las fracciones con denominador 4 tienen 2 lugares después de la coma en su expresión decimal". ¿Es cierto esto?

3) ¿Cuál es la expresión decimal para $\frac{2}{3}$?

4) ¿Cuáles de estas fracciones se pueden escribir con un denominador igual a una potencia de 10?

$\frac{3}{5}$ $\frac{7}{40}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{30}$ $\frac{4}{25}$
$\frac{5}{7}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{9}{3}$

5) Julieta dice: "Para saber cuántos lugares después de la coma tiene un número, hacé lo siguiente: Por ejemplo, $\frac{3}{25}$ es equivalente a $\frac{12}{100}$ porque 4 x 25 = 100, y 4 x 3 = 12; entonces, $\frac{3}{25}$= 0,12". ¿Lo que señala Julieta se puede hacer para cualquier fracción?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4 Y 5

Una estrategia para el problema 1 es pensar en fracciones equivalentes con denominador 10, 100, 1.000, etc. En algunos casos se puede apelar a algunos resultados familiares; por ejemplo, un número impar dividido 2 "da coma 5". Esos

9 En *Matemática. Fracciones y números decimales. 6º grado. Apuntes para la enseñanza*, se realiza un trabajo exhaustivo con fracciones decimales.

casos se pueden reexaminar transformando la fracción en fracción decimal. Así, por ejemplo, $\frac{85}{2} = \frac{425}{10}$; con lo cual $\frac{85}{2}$ es 42,5.

Será interesante que los alumnos exploren qué sucede con las fracciones de denominador 4. La idea es alentarlos a que pongan ejemplos, ensayen, conjeturen.

Cuando se realiza una división por 4, los posibles restos son 0, 1, 2 ó 3. Esto es lo que puede ocurrir cuando se divide el numerador de una fracción por su denominador 4. En el caso de que el resto sea 0, la fracción está representando un número entero. Si el resto es 1, como 1: 4 es 0,25, la expresión decimal de la fracción será "coma 25"; si el resto es 2, la fracción será "coma 5", ya que 2 : 4 es 0,5. Un análisis similar permite establecer que si el resto es 3, la fracción será "coma 75".

El trabajo que se haya realizado con la noción de división entera y el análisis de los posibles restos permitirá que se comprendan las ideas antes expresadas.

Está claro que no se trata de que los alumnos recuerden de memoria qué sucede con las fracciones de denominador 4, simplemente el problema invita a formular conjeturas cuya validación está al alcance de sus conocimientos y por esa razón se proponen.

En el problema 3 será necesario que los alumnos realicen la cuenta "a mano" para poner en evidencia que la cuenta "no termina". Así, al hacer

```
2         | 3
 2 0       0,666
   2 0
     2 0
```

los alumnos pueden comenzar a establecer que el resto 2 se repetirá "siempre".

A estas fracciones cuyas expresiones decimales "no terminan al hacer la cuenta de dividir" se las llama **expresiones decimales periódicas.**

La intención del problema 4 es poner en evidencia que no siempre se puede "lograr" una fracción equivalente a una dada, cuyo denominador sea una potencia de 10. Para que ello ocurra, el denominador de la fracción irreducible debe contener solamente potencias de 2 y de 5. Veamos.

Tomemos, por ejemplo, el caso de $\frac{3}{16}$.

Como 16 = 2 x 2 x 2 x 2

para que se pueda escribir como una potencia de 10 es necesario que pueda escribirse:

10 = 2 x 5; o bien
100 = 2 x 2 x 5 x 5
1.000 = 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5
10.000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5 x 5 x 5, etcétera.

Entonces, si se multiplica 16 por 5 x 5 x 5 x 5, que es igual a 625, se obtiene 10.000.

Se tiene entonces que $\frac{3}{16}$ es equivalente a $\frac{1.875}{10.000}$, por tanto, $\frac{3}{16}$ = 0,1875.

En cambio, para la fracción $\frac{4}{15}$, no hay números enteros que multiplicados por 15 den como resultado una potencia de 10. Esto ocurre porque el 15 está compuesto por los factores 3 y 5; 15 = 3 x 5. El factor 3 "perturba" la posibilidad de dicha transformación.

Se podría concluir con los alumnos que, para que una fracción se pueda escribir como una fracción con denominador potencia de 10, es necesario que el denominador se pueda descomponer en factores primos usando solamente potencias de 2 y de 5.

También sería interesante trabajar, por ejemplo, que $\frac{1}{30}$ es una expresión decimal periódica; en cambio, $\frac{6}{30}$ no lo es; y sin embargo las dos tienen el mismo denominador. ¿A qué se debe esto? A que se necesita analizar el denominador de la expresión irreducible, que en el caso de $\frac{6}{30}$ es $\frac{1}{5}$, que es equivalente a $\frac{2}{10}$. O directamente analizar que $\frac{6}{30}$ es equivalente a $\frac{2}{10}$ sin pasar por la expresión irreducible. Entonces, no sólo se tiene que "mirar" el denominador, sino también se debe considerar el numerador.

Se podría dejar registrado lo siguiente:

- Todo número racional admite una expresión decimal finita o periódica.
- Para que una fracción admita una expresión decimal finita es necesario que pueda representarse por una fracción irreducible cuyo denominador tiene como factores en su descomposición en factores primos a potencias de 2 y de 5.

La publicación *Matemática. Fracciones y números decimales. 7º grado. Apuntes para la enseñanza*
ha sido elaborada por la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
Las opiniones de directivos, maestros, padres y alumnos son muy importantes
para mejorar la calidad de estos materiales. Sus comentarios pueden ser enviados a

G.C.B.A. Secretaría de Educación
Paseo Colón 255. 9º piso.
CPAc1063aco. Buenos Aires
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

PLAN PLURIANUAL
2004
2007
PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA

PLAN PLURIANUAL

2004
2007

PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA