



Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Apuntes para la enseñanza

Matemática

Fracciones y números decimales

6

G.C.B.A.



Matemática

Fracciones y números decimales. 6º grado

Apuntes para la enseñanza



Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires . Ministerio de Educación.
Dirección General de Planeamiento . Dirección de Currícula

Matemática, fracciones y números decimales 6to grado : apuntes para la enseñanza / dirigido por Cecilia Parra - 1a ed. - Buenos Aires : Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2005.
56 p. ; 28x22 cm. (Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza 2004-2007)

ISBN 987-549-283-3

1. Educación-Planes de Estudio I. Parra, Cecilia, dir.
CDD 372.011

Tapa: *Laberinto de luz en la recova*, de Miguel Ángel Vidal, pintura acrílica, 1979 (fragmento).

ISBN 987-549-283-3

© Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Ministerio de Educación

Dirección General de Planeamiento

Dirección de Currícula. 2005

Hecho el depósito que marca la Ley n° 11.723

Paseo Colón 255. 9° piso.

CPAc1063aco. Buenos Aires

Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

Permitida la transcripción parcial de los textos incluidos en esta obra, hasta 1.000 palabras, según Ley 11.723, art. 10°, colocando el apartado consultado entre comillas y citando la fuente; si éste excediera la extensión mencionada deberá solicitarse autorización a la Dirección de Currícula. **Distribución gratuita. Prohibida su venta.**

GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

Jefe de Gobierno

ANÍBAL IBARRA

Vicejefe de Gobierno

JORGE TELERMAN

Secretaria de Educación

ROXANA PERAZZA

Subsecretaria de Educación

FLAVIA TERIGI

Directora General
de Educación Superior

GRACIELA MORGADE

Directora General
de Planeamiento

FLORENCIA FINNEGAN

Directora General
de Educación

HAYDÉE CHIOCCHIO DE CAFFARENA

Directora
de Currícula

CECILIA PARRA

Director de Área
de Educación Primaria

CARLOS PRADO

"Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007"

Dirección de Currícula

Dirección: Cecilia Parra.

Coordinación de área de Educación Primaria: Susana Wolman.

Colaboración en área de Educación Primaria: Adriana Casamajor.

Coordinación del área de Matemática: Patricia Sadovsky.

MATEMÁTICA. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES. 6º GRADO. APUNTES PARA LA ENSEÑANZA

COORDINACIÓN AUTORAL: PATRICIA SADOVSKY.

ELABORACIÓN DEL MATERIAL: CECILIA LAMELA Y DORA CARRASCO.

sobre la base de: Héctor Ponce y María Emilia Quaranta. *Matemática. Grado de Aceleración 4°- 7°.*

Material para el alumno. Material para el docente. 2003/2004. (Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad en el nivel primario de la Ciudad de Buenos Aires, Proyecto conformación de grados de aceleración.)

G.C.B.A.

EDICIÓN A CARGO DE LA DIRECCIÓN DE CURRÍCULA.

Coordinación editorial: Virginia Piera.

Coordinación gráfica: Patricia Leguizamón.

Diseño gráfico y supervisión de edición: María Laura Cianciolo, Alejandra Mosconi, Patricia Peralta.

Ilustraciones: Andy Crawley. Gustavo Damiani.

Apoyo administrativo y logístico: Gustavo Barja, Olga Lose, Jorge Louit, Miguel Ángel Ruiz.

Índice

■ Presentación	7
■ Introducción	9
Primera parte: Fracciones	
■ ACTIVIDAD 1. Revisión del trabajo con fracciones	15
■ ACTIVIDAD 2. Relación de orden entre fracciones	21
■ ACTIVIDAD 3. Fracciones en la recta numérica	23
■ ACTIVIDAD 4. Relación de orden entre fracciones. Otra vuelta	26
■ ACTIVIDAD 5. Operaciones con fracciones	29
■ ACTIVIDAD 6. Multiplicación y división de una fracción por un número natural	29
■ ACTIVIDAD 7. Multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad directa	33
Segunda parte: Números decimales	
■ ACTIVIDAD 1. Repasamos cuestiones básicas de los números decimales	38
■ ACTIVIDAD 2. Valor posicional	40
■ ACTIVIDAD 3. Unidades de longitud	43
■ ACTIVIDAD 4. Comparación y orden de números decimales	46
■ ACTIVIDAD 5. Operaciones con números decimales. Suma y resta	48
■ ACTIVIDAD 6. Cociente decimal de dos números naturales. Expresión decimal de fracciones no decimales	50
■ ACTIVIDAD 7. ¿Dividir por 10, 100, 1.000 o multiplicar por 0,1; 0,01; 0,001?	52
■ ACTIVIDAD 8. La proporcionalidad directa, la multiplicación y los números decimales	53

Presentación ■

La Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires se propone en el marco de su política educativa desplegar una serie de acciones para impulsar el mejoramiento de la enseñanza en el nivel primario. En pos de ese propósito pone en marcha, para el período 2004-2007, el "Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza en el Segundo Ciclo del Nivel Primario" en las escuelas de la Ciudad con los siguientes objetivos generales:

- Producir mejoras en la enseñanza en el segundo ciclo de la escuela primaria colocando, sucesivamente, áreas y ejes dentro de éstas como motivo central de los intercambios y de los esfuerzos compartidos.
- Promover debates sobre cuáles son las condiciones pedagógicas adecuadas para asegurar los aprendizajes buscados en las áreas y los ejes seleccionados.
- Construir una visión compartida sobre los aprendizajes centrales que la escuela primaria debe garantizar para todos los alumnos y alumnas, y sobre las condiciones de enseñanza que permiten su logro –programación, modalidades, recursos, entre otros.
- Instar a un trabajo institucional que permita articular un proyecto común en el que se inserten las responsabilidades de cada docente –supervisores, directivos y maestros– y cobren sentido las experiencias formativas de los alumnos.
- Contribuir en la construcción y la difusión de herramientas conceptuales y metodológicas que permitan realizar, para cada área, el seguimiento y los reajustes necesarios en función de la continuidad y la progresión de la enseñanza a lo largo del segundo ciclo.

Asimismo, la Secretaría de Educación asume el compromiso de proveer recursos de enseñanza y materiales destinados a maestros y alumnos. Por tanto, se presentan a la comunidad educativa las siguientes publicaciones para el trabajo en el aula en las áreas de Matemática y Prácticas del Lenguaje.

Matemática. Fracciones y números decimales integra un conjunto de documentos destinados a cada grado del segundo ciclo, en los que se aborda el tratamiento didáctico de los números racionales contemplando el complejo problema de su continuidad y profundización a lo largo del ciclo. La serie se compone

de *Apuntes para la enseñanza*,* destinados a docentes de 4º, 5º, 6º y 7º grados, y de *Páginas para el alumno*. Cada documento de *Apuntes para la enseñanza* está organizado en actividades que implican una secuencia de trabajo en relación con un contenido. En cada actividad, los docentes encontrarán una introducción al tema, problemas para los alumnos, su análisis y otros aportes que contribuyen a la gestión de la clase. En *Páginas para el alumno* se presentan esos problemas.

La elección de números racionales obedece –como puede leerse en la "Introducción" de *Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza*– a varias razones: es un campo de contenidos complejos, ocupa un lugar central en la enseñanza en segundo ciclo, y la propuesta formulada en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria 2004*** plantea modificaciones al modo en el que se concibió su tratamiento didáctico en la escuela durante mucho tiempo. Por ello, se requieren para su enseñanza materiales más cercanos al trabajo del aula y que puedan constituir un aporte para abordar su articulación y evolución a lo largo del ciclo.

La presentación de los documentos correspondientes al área Prácticas del Lenguaje tiene por objetivo alentar la lectura de novelas en el segundo ciclo. La serie se inicia con *Robin Hood* y *El diablo en la botella*. Acompañando las novelas que llegarán a las escuelas, los maestros dispondrán de *Orientaciones para el docente* y los niños, de *Páginas para el alumno*, en los cuales se ofrece información sobre el tiempo histórico en el que ocurren los hechos narrados en cada novela, las realidades de las regiones a las que alude el relato, su autor en el caso de *El diablo en la botella*. La propuesta ofrece a los alumnos la oportunidad de enfrentarse simultáneamente a un texto narrativo extenso y a diversos textos informativos –artículos de enciclopedia, esquemas con referencias, notas al pie y varios epígrafes.

Los documentos son concebidos como recursos disponibles para el equipo docente, que es quien decide su utilización. Los materiales de Prácticas del Lenguaje se incorporan a la biblioteca de la escuela para facilitar que los docentes dispongan de ellos cuando lo prefieran. En el caso de Matemática, todos los docentes de segundo ciclo que trabajan esta área recibirán *Apuntes para la enseñanza* y podrán solicitar los materiales para entregar a los alumnos.

Las decisiones que los docentes tomen sobre el uso de estos materiales y el análisis de sus efectos serán insumos para reflexionar acerca de la enseñanza. Deseamos reiterar la importancia de que hagan llegar, por los diversos medios habilitados (reuniones, correo electrónico), todos sus comentarios y sugerencias sobre los materiales. Esto permitirá su mejoramiento, a favor de su efectiva utilidad en las escuelas y las aulas, y puede representar también oportunidades de diálogo en torno a las preocupaciones y los proyectos compartidos.

* En la introducción de estos documentos se explicitan posibilidades de opción en cuanto a la solicitud y la secuenciación de los materiales para los alumnos, ordenados por complejidad más que por su determinación estricta para un grado. Por ejemplo, lo propuesto para 4º puede ser utilizado a inicios de 5º o lo propuesto para 6º extendido a 7º grado.

** G.C.B.A., Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Primer ciclo de la Escuela Primaria / Educación General Básica*, 2004 y *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo de la Escuela Primaria / Educación General Básica*, 2004, tomos 1 y 2.

Introducción ■

Desde que el *Pre Diseño Curricular*¹ para el segundo ciclo comenzó a difundirse, muchos docentes han planteado la necesidad de contar con materiales más directamente vinculados al trabajo del aula que los ayuden a interpretar los lineamientos curriculares. Dichos lineamientos tienen actualmente plena vigencia a raíz de la aprobación del *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*,² primero y segundo ciclo.

Muchos docentes reconocen que las propuestas de cambio curricular en la Ciudad de Buenos Aires apuntan a enriquecer la experiencia educativa de los alumnos, al tiempo que solicitan "mediaciones" entre esas formulaciones y las prácticas del aula.

Por otro lado, en el marco del "Plan Plurianual para el Mejoramiento de la enseñanza en el Segundo Ciclo del Nivel Primario", se ha identificado la dificultad de elaborar proyectos de enseñanza que articulen el trabajo matemático de un año a otro y hagan "crecer" la complejidad de contenidos que atraviesan el ciclo.

La serie de documentos "Matemática. Fracciones y números decimales en el segundo ciclo" responde tanto a la voluntad de desplegar la propuesta del *Diseño Curricular* como a la de ofrecer herramientas para abordar la planificación y el desarrollo de la enseñanza en el segundo ciclo en orden a una complejización creciente.

Entre las diversas maneras en que se busca fortalecer a los equipos docentes, se optó, en este caso, por la elaboración de *Apuntes para la enseñanza* con propuestas analizadas y acompañarlas con *Páginas para el alumno* en las que se incluyen los problemas seleccionados.

Al presentar estas secuencias, la intención es contribuir a mostrar cómo pueden los maestros hacer evolucionar la complejidad de los contenidos que se proponen, ayudando a los alumnos a tejer una historia en la que puedan transformar su "pasado escolar" –lo ya realizado– en una referencia para abordar nuevas cuestiones, al tiempo que cobran conciencia de que progresan y de que son capaces de enfrentar cada vez asuntos más difíciles ("esto antes no lo sabía y ahora lo sé").

Disponer de secuencias de enseñanza en las que se encara tanto el tratamiento didáctico de uno de los sentidos de un concepto para los distintos grados del ciclo como de distintos sentidos de un concepto para un mismo grado, puede constituir un aporte para enfrentar el complejo problema de la articulación y la evolución de los contenidos a lo largo del ciclo.

1 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica (Educación Primaria y Media, según denominación vigente)*, 1999.

2 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*, primero y segundo ciclo, 2004.

Por otro lado, los docentes encontrarán en estos materiales situaciones "de repaso" en las que se invita a los alumnos a revisar un tramo del recorrido escolar, proponiéndoles una reflexión sobre el mismo que "ponga a punto" su entrada en un nuevo tema. También son numerosas las apelaciones a hacer síntesis y a plantear conclusiones a propósito de un conjunto de problemas. Tal vez al principio estas conclusiones estén muy contextualizadas en los problemas que les dieron origen, será tarea del maestro hacer que se les atribuya un carácter cada vez más general. El alumno debe intervenir en el trabajo de articulación de las diferentes zonas del estudio de los números racionales; para que pueda hacerlo, el maestro debe convocarlo explícitamente a esa tarea y contribuir con él en su realización.

El material está organizado en actividades, cada una es una secuencia de trabajo que apunta a un contenido y que incluye varios problemas. En general se presenta una introducción sobre los asuntos en juego en la actividad, se proponen problemas para los alumnos y se efectúa un análisis de los mismos donde se ofrecen elementos para la gestión del docente. Muchas veces se sugieren, como parte del análisis de las secuencias, cuestiones nuevas para plantear a los alumnos. Es decir, el trabajo realizado por los alumnos en un cierto tramo ofrece un contexto para abordar cuestiones más generales que no tendrían sentido si dichas actividades no se llevaran a cabo. Tomar como "objeto de trabajo" una serie de problemas ya realizados, analizarlos y hacerse preguntas al respecto da lugar a aprendizajes diferentes de los que están en juego cuando el alumno resuelve un problema puntual.

A continuación se informa sobre la disponibilidad de los materiales para luego fundamentar por qué se ha elegido el campo de los números racionales para iniciar esta modalidad de producción.

"Matemática. Fracciones y números decimales" se compone de *Apuntes para la enseñanza* (4°, 5°, 6° y 7° grado) destinado a los docentes y *Páginas para el alumno* (4°, 5° y 6° grado). *Apuntes para la enseñanza* se entrega a los maestros de acuerdo con el grado en que se desempeñan; una vez que el equipo docente decide desarrollar las propuestas, solicita la cantidad de ejemplares necesarios de *Páginas para el alumno*. Este material, que se presenta con el formato de hoja de carpeta, será entregado a cada alumno para que trabaje en él.

El docente habrá advertido que los materiales están organizados por grado, sin embargo no necesariamente deben ser empleados según dicha correspondencia. Se sugiere que el equipo docente analice todo el material y decida su utilización ya sea tal como se presenta o bien según sus criterios y la historia de enseñanza que se viene desplegando. En este sentido, pueden elegir materiales correspondientes a dos años para ser empleados por el mismo grupo de alumnos. Por ejemplo, para los alumnos de 6° grado se podrán solicitar tanto *Páginas para el alumno* correspondientes a 5° como a 6° grado; o bien, las actividades que se presentan en *Páginas para el alumno* correspondiente a 6° pueden ser incluidas o retomadas en 7°. Es decir, no habrá inconveniente en que los maestros soliciten materiales correspondientes a dos grados para sus alumnos.

En *Apuntes para la enseñanza*, 7° grado, se incluyen actividades a realizar por los alumnos. Sin embargo, éstas no han sido impresas en forma independiente sino que constituyen opciones posibles cuya inclusión depende de la planificación y del balance que los docentes de 7° hagan entre los muchos temas importantes del año.

¿POR QUÉ UNA PROPUESTA SOBRE NÚMEROS RACIONALES?

En primer lugar, se trata de un campo de contenidos complejo, cuya elaboración comienza en cuarto grado y continúa más allá de la escuela primaria, que supone rupturas importantes con las prácticas más familiares que los alumnos desplegaron a propósito de los números naturales.

Como se explicita en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*, segundo ciclo:

“El estudio de los números racionales –escritos en forma decimal o fraccionaria– ocupa un lugar central en los aprendizajes del segundo ciclo. Se trata –tanto para los niños como para los maestros– de un trabajo exigente que deberá desembocar en un cambio fundamental con respecto a la representación de número que tienen los niños hasta el momento. Efectivamente, el funcionamiento de los números racionales supone una ruptura esencial con relación a los conocimientos acerca de los números naturales: para representar un número (la fracción) se utilizan dos números naturales, la multiplicación no puede –salvo cuando se multiplica un natural por una fracción– ser interpretada como una adición reiterada, en muchos casos el producto de dos números es menor que cada uno de los factores, el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo, los números ya no tienen siguiente...”

“Por otra parte, como ocurre con cualquier concepto matemático, usos diferentes muestran aspectos diferentes.³ Un número racional puede:

- *ser el resultado de un reparto y quedar, en consecuencia, ligado al cociente entre naturales;*
- *ser el resultado de una medición y, por tanto, remitirnos a establecer una relación con la unidad;*
- *expresar una constante de proporcionalidad; en particular esa constante puede tener un significado preciso en función del contexto (escala, porcentaje, velocidad, densidad...);*
- *ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo;*
- *etcétera.”*

Se considera entonces necesario contribuir con los docentes en la organización de esta complejidad, proponiendo un desarrollo posible.

En segundo lugar, el *Diseño Curricular* plantea modificaciones al modo en que por años se concibió el tratamiento de los números racionales en la escuela. ¿A qué tipo de cambios respecto de lo tradicionalmente instituido nos estamos refiriendo?

Al organizar los contenidos por “tipos de problemas que abarcan distintos sentidos del concepto” (reparto, medición, proporcionalidad, etc.), el *Diseño Curricular* propone que se aborden en simultáneo asuntos que usualmente aparecían segmentados en el tiempo o, incluso, distribuidos en años diferentes de la escolaridad.

Por ejemplo, se inicia el estudio de los números racionales (las fracciones) a partir del concepto de división entera, proponiendo que los alumnos “sigan

3 Para ampliar los diferentes sentidos de las fracciones, véase *Matemática, Documento de trabajo n° 4, Actualización curricular, G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currículum, 1997.*

repartiendo" los restos de una división y cuantifiquen dicho reparto. Al dejar abierta la posibilidad de que el reparto se realice de distintas maneras, muchos alumnos fraccionan lo ya fraccionado y luego enfrentan el problema de cuantificar esa acción. Además, los diversos modos de hacer los repartos que surgen en la clase, dan sentido a plantear la necesidad de establecer la equivalencia entre los números que representan esos repartos. Fracción de fracción y equivalencia aparecen entonces de entrada, aunque esos asuntos no se traten de manera formal sino en el contexto en el que emergen. De modo que podríamos decir: que el problema de hacer repartos y establecer su equivalencia –problema que, como antes se señaló, se propone para abordar el estudio de las fracciones– "pone juntos" los contenidos de división entera, fracción, fracción de fracción, equivalencia y orden, al tiempo que el mismo problema ofrece un contexto que da pistas para que los alumnos puedan tratarlos. En este último sentido, no diríamos, por ejemplo, que la noción "fracción de fracción" que surge de esta manera es exactamente la misma que la que se trata cuando el tema se propone aisladamente. Aclaremos el alcance de lo que señalamos: $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ es, en cualquier contexto, $\frac{1}{12}$; lo que estamos subrayando es que el modo en que se plantea la necesidad de realizar dicha operación –a partir de qué problemas, conociendo qué cuestiones– otorgará diferentes sentidos a la misma, incluyendo en la idea de sentido los elementos que tienen los alumnos para resolverla. Por otro lado, aunque del problema del reparto equitativo surja la noción de fracción de fracción, ésta deberá ser retomada en otros contextos, re trabajada, descontextualizada y formalizada. Esto demandará, sin duda, mucho tiempo: como todos sabemos, las nociones no se aprenden de una vez y para siempre sino que necesitan ser tratadas una y otra vez en distintos ámbitos y estableciendo relaciones entre ellas.

Sería legítimo preguntarse –muchos maestros lo preguntan–: "¿por qué complicar las cosas, si el trabajo 'paso a paso' da resultado?" La pregunta remite nuevamente a la cuestión del sentido que estamos atribuyendo a la matemática en la escuela: desde nuestro punto de vista, las nociones que estuvimos mencionando (fracción de fracción, equivalencia, reparto equitativo) están imbricadas unas con otras; por eso, tratarlas juntas en un contexto particular permite arrancar el estudio de las fracciones con un conjunto más amplio y más sólido de relaciones que se irán retomando con el tiempo. Tratar cada una de estas nociones de manera aislada puede ser en el momento más fácil para los alumnos, pero, al ser también más superficial, se torna "menos duradera". Menos duradera porque olvidan fácilmente aquello que no aparece entramado en una organización donde las distintas nociones que componen un campo de conceptos se relacionan unas con otras. Detrás de la idea de "lo fácil" y "lo difícil" hay cuestiones importantes para discutir respecto de la experiencia formativa que se pretende impulsar.

Sintetizando: al organizar el trabajo sobre los números racionales tomando como criterio *los ámbitos de funcionamiento del concepto* (reparto, medición, etc.), se modifica el orden de presentación que siempre tuvieron las nociones que conforman el concepto. Aprovechemos para señalar que el paso del tiempo torna "naturales" ciertos ordenamientos de los contenidos escolares que en realidad fueron producto de decisiones que respondían a cierto proyecto educativo. Cuando se revisa el proyecto, lo natural es revisar también los órdenes y relaciones entre los contenidos.

Otro asunto que plantea el *Diseño Curricular* respecto del tratamiento de los números racionales –y que se intenta plasmar en esta serie– se refiere al papel que se le otorga a las relaciones de proporcionalidad como contexto en la elaboración de criterios para operar con fracciones y decimales. Efectivamente, en las *Páginas para el alumno* de sexto grado que integran esta serie se presentan situaciones de proporcionalidad directa donde hay que operar con fracciones y decimales antes de haber formalizado y sistematizado los algoritmos correspondientes a dichas operaciones. La idea es que los alumnos resuelvan esas situaciones usando –a veces de manera implícita– las propiedades de la proporcionalidad y que, una vez resueltas, puedan analizar lo hecho y tomar conciencia de que en dicha resolución están involucrados cálculos con fracciones y decimales. Disponer del resultado de un cálculo sin conocer el algoritmo obliga a pensar cómo debe funcionar el algoritmo para obtener un resultado que ya se conoce. En algún sentido, se está invitando al siguiente mecanismo productor de conocimiento: “si este problema involucra el cálculo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ y yo ya resolví el problema y sé que el resultado es $\frac{1}{10}$, ahora me las tengo que arreglar para entender cómo funciona la multiplicación de fracciones para que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ sea $\frac{1}{10}$ ”. Obviamente no estamos esperando que los niños repitan frases de este tipo, si queremos comunicar que ese mecanismo está presente en el tratamiento de las operaciones multiplicativas con fracciones y decimales; tenerlo en cuenta conlleva el doble propósito: ofrecer a los alumnos un camino para que elaboren estrategias y operen; y, de manera más transversal, mostrar un mecanismo a través del cual se produce conocimiento matemático.

En tercer lugar, otra razón por las que se proponen materiales sobre los números racionales: quisimos mostrar la potencia de este contenido para poner en juego aspectos del trabajo matemático a los que les atribuimos un alto nivel formativo. Formular leyes para comparar números, establecer la verdad o la falsedad de enunciados, analizar la equivalencia de expresiones numéricas sin apelar al cálculo efectivo, comparar diferentes procedimientos realizados por “otros”, delimitar el alcance de diferentes propiedades (“esta ‘regla’ vale en tales casos”) son tareas que, al ubicar al alumno en un plano de reflexión sobre el trabajo llevado a cabo, le permiten comprender aspectos de la organización teórica de la disciplina, le posibilitan acceder a las razones por las cuales algo funciona de una cierta manera. Lograr que los alumnos adquieran cierto nivel de fundamentación para los conceptos y propiedades con los que tratan, es un propósito de la educación matemática que la escuela tiene que brindar.

CARACTERÍSTICAS DE LAS PROPUESTAS

Las secuencias que se presentan no están en general pensadas para que los alumnos resuelvan de manera inmediata la tarea que se les propone. Sí se espera –cada vez– que puedan empezar a abordar, explorar, ensayar. En algunos casos, podrán arribar a conclusiones de manera bastante autónoma y en otros requerirán de la ayuda del docente. Alentamos la tarea de exploración como un

modo de formar a un alumno autónomo, que acepta el desafío intelectual, que elabora criterios para validar su propio trabajo.

A propósito de algunos de los problemas, es probable que los alumnos evidencien cierta dificultad para entender con precisión qué es lo que se les pide. Puede ser que el docente interprete que el alumno no comprende la consigna. Sin embargo, la falta de comprensión de la consigna se vincula en general con el hecho de que la tarea en danza es conceptualmente nueva; por eso, entender lo que se pide supone para los alumnos ampliar su perspectiva respecto de los conceptos involucrados en el problema. En esos casos seguramente serán necesarias explicaciones del docente que "completan" la formulación escrita del problema. Estas explicaciones son un modo de empezar a comunicar las nuevas ideas que están en juego.

Se suele atribuir la falta de comprensión de las consignas a un tema "extra matemático" (más ligado al área de Prácticas del Lenguaje). Sin embargo, esta falta de comprensión es, en general, "matemática": los alumnos no entienden qué hay que hacer porque todavía no conciben claramente en qué consiste la tarea en cuestión. Comprenderlo es parte del aprendizaje.

Mucho se ha discutido si el docente debe o no intervenir en la tarea que realiza el alumno. Es claro que el docente debe ayudar al alumno que se encuentra "bloqueado" eso hace a la definición del trabajo docente. Tal vez sea bueno analizar que entre "decir cómo es" y "no decir nada" hay una gama importante de intervenciones que podrían dar pistas a los alumnos para seguir sosteniendo su tarea. Conocer diferentes modos de abordar la tarea puede ayudar al docente a elaborar posibles intervenciones. Ésa es la razón por la cual, al analizar las secuencias propuestas en *Apuntes para la enseñanza*, se incluyen posibles estrategias de los alumnos. La discusión de algunas de estas estrategias con el conjunto de la clase podrá enriquecer el contenido que se está tratando, aunque las mismas no hayan sido propuestas por los niños.

Lograr que los alumnos entren en un trabajo matemático más profundo –más enriquecedor, pero también más difícil– no es tarea de un día, es producto de una historia que se va construyendo lentamente en la clase. Los alumnos deben sentir que se confía en ellos, que tienen permiso para equivocarse, que su palabra es tomada en cuenta. A la vez deben aprender: a pedir ayuda identificando de la manera más precisa posible la dificultad que tienen y no sólo diciendo "no me sale", a respetar la opinión de los otros, a sostener un debate... El maestro juega un rol fundamental en estos aprendizajes.

A diferencia de lo que suele pensarse, la experiencia nos muestra que muchos alumnos se posicionan mejor frente a un problema desafiante que frente a una tarea fácil. Lograr que el alumno experimente el placer de dominar lo que en un principio se mostraba incomprensible, ayuda a que construya una imagen valorizada de sí mismo. Obviamente, esto es bueno para él, pero también es altamente satisfactorio para el docente.

Es nuestro deseo que en alguna medida estos *Apuntes para la enseñanza*, y también las *Páginas para el alumno*, contribuyan a que el docente pueda enfrentar la difícil tarea de enseñar, gratificándose con el despliegue de una práctica más rica y más plena.

Revisión del trabajo con fracciones

Actividad 1

A continuación se presenta una serie de problemas con el propósito de que los alumnos recuerden ideas vinculadas al concepto de fracción trabajadas en 4° y 5° grado.

REVISIÓN DEL TRABAJO CON FRACCIONES
PROBLEMAS

1) Determinar qué parte del área del rectángulo representa la región sombreada.



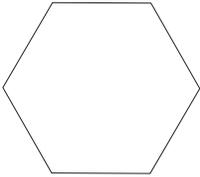
2) ¿En cuál de los cuadrados se pintó más superficie? Tené en cuenta que los cuadrados son iguales.



3) En cada uno de los siguientes casos, el dibujo representa una fracción de la unidad. Para cada caso, tu tarea consiste en dibujar la unidad.

 Representa $\frac{2}{7}$ de la unidad.

4) Si el área de la figura es $\frac{3}{5}$ de una cierta unidad, dibujá una figura de área igual a la unidad. ¿Hay un único dibujo posible?



Representa $\frac{6}{5}$ de la unidad.

Representa $\frac{8}{2}$ de la unidad.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3 Y 4

A través de estos problemas se pretende repasar la definición de fracción que los alumnos han trabajado en años anteriores.

El problema 1 confronta a los alumnos con la necesidad de comparar la parte a evaluar con el entero. Como no se puede cubrir el rectángulo con copias de la parte sombreada, será necesario buscar un "intermediario" para establecer la medida de la parte sombreada. En este caso, el triangulito de la esquina puede resultar de utilidad ya que entra tres veces en la parte sombreada y ocho en el rectángulo total; esto permite establecer que la parte sombreada es $\frac{3}{8}$ del rectángulo. En la discusión colectiva puede señalarse que la estrategia de apelar a una parte del entero para evaluar otra, resultará útil en los casos en los que se hace compleja la relación directa entre esta otra parte y el entero.

G.C.B.A.

El problema 2 requiere comparar dos zonas. En este caso la vista parece engañar, ya que las dos áreas que se comparan son iguales aunque una parece mayor que la otra. Establecer la igualdad de las áreas requerirá analizar que el triángulo "del medio" equivale a los dos de los costados.

Reconstruir la unidad, a partir de conocer sólo una fracción de ella, requiere diferentes relaciones en función de los números específicos del problema. Así, en el primer caso del problema 3, los alumnos pueden intentar "juntar" varios dibujos como los dados, si bien esto no resultará suficiente porque $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$. Si agregan otro dibujo, "se pasan". Este mismo intento puede hacer observable que es clave conseguir $\frac{1}{7}$ que es la mitad de $\frac{2}{7}$. Esto plantea otra cuestión: ¿cómo partir el gráfico para representar $\frac{1}{7}$? Caer en la cuenta de que puede accederse a la solución de varias formas posibles será una oportunidad para diferenciar forma de medida.

El segundo gráfico representa una fracción mayor que 1, razón por la cual el problema es algo más complejo que el anterior. Pero, justamente, la resolución del primer problema puede constituirse en un punto de apoyo: si se divide el rectángulo en 6, se obtiene $\frac{1}{5}$, fracción que permite reconstruir cómodamente el entero. Es usual que, frente a un problema como éste, algunos alumnos tiendan a dividir el rectángulo en cinco partes (en lugar de seis) por el hecho de que se trata de "quintos". Será productivo proponer esta discusión al conjunto: "¿por qué si se trata de 'quintos' conviene dividir el rectángulo en seis partes iguales?".

Al analizar el tercer gráfico, los alumnos deberán darse cuenta de que $\frac{8}{2}$ es equivalente a 4, con lo cual si toda la circunferencia representa 4 unidades, la cuarta parte de la circunferencia equivale a 1. Resulta "raro" que haya que dividir en partes para hallar la unidad. Tal vez sea bueno explicitar esta "rareza" para habilitar con "pleno derecho" el procedimiento.

Para analizar el problema 4, en el cual a partir de una figura que representa $\frac{3}{5}$ de la unidad se la busca recomponer, habrá que trabajar dos ideas: a) es necesario dividir en tres la figura para obtener quintos del total; y b) habrá que considerar que no cualquier división en tres partes garantiza tercios sino que se debe justificar de alguna forma que esas partes son iguales. Una manera posible de abordar el problema sería dividiendo el hexágono en 6 triángulos iguales con base en cada uno de los lados del hexágono y vértice en el centro de la figura.

De este modo, dos triángulos representarían $\frac{1}{3}$ de la figura y, por tanto, $\frac{1}{5}$ de la unidad que se debe reconstruir.



REVISIÓN DEL TRABAJO CON FRACCIONES

PROBLEMA

5) Resolvé los siguientes problemas:

a) De un ramo de 12 flores, $\frac{1}{4}$ son rosas.
¿Cuántas flores son rosas?

b) Juan le regala la mitad de sus 68 figuritas a un compañero. ¿Cuántas figuritas le regala?

c) Joaquín perdió $\frac{2}{3}$ de sus 30 figuritas.
¿Cuántas figuritas perdió?

- d) En el último examen, $\frac{3}{4}$ de los 40 alumnos obtuvo un puntaje superior a 6. ¿Qué cantidad de alumnos tuvo esas notas?
- e) Martín decidió regalar a su primo $\frac{1}{4}$ de sus bolitas. Si le dio 23 bolitas a su primo, ¿cuántas tenía?
- f) $\frac{2}{5}$ de los alumnos forman parte del equipo de fútbol. Hay 32 alumnos en el equipo de fútbol, ¿cuántos alumnos hay en total?
- g) María pegó 27 figuritas en su álbum. Si el álbum completo tiene 54 figuritas, ¿qué parte del álbum completó?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 5

En este ítem se propone una serie de situaciones en las que es necesario averiguar la fracción de una colección, como en el caso de las situaciones a), b), c), d), o recuperar el entero conociendo la cantidad que corresponde a una parte. Estas situaciones son similares a las que los alumnos enfrentaron al abordar el problema 3, si bien ahora se trata con cantidades discretas, lo cual las hace algo más complejas. Esta mayor complejidad se debe a la necesidad de coordinar dos unidades simultáneamente: un objeto de la colección y la colección entera.

Las primeras situaciones son más fáciles y tienen la intención de que los alumnos "entren en calor" con el tema.

Averiguar la cantidad total conociendo una fracción de la misma es una tarea un poco más compleja y requerirá que se revise con mayor profundidad el concepto de fracción. Así, por ejemplo, en el problema f) si se sabe que 32 alumnos representan $\frac{2}{5}$ de la cantidad total, podrían pensar que para averiguar $\frac{1}{5}$ es necesario hacer $32 : 2$. Y como 16 alumnos representan $\frac{1}{5}$ del total, para averiguar el entero, o sea, los $\frac{5}{5}$, será necesario hacer 16×5 , que es igual a 80. En el espacio de la clase, resultará interesante comparar este problema con el problema 3 en el que los alumnos resolvieron una tarea similar usando magnitudes continuas.

En la última situación de esta serie de problemas, en la que se propone averiguar qué parte es 27 de 54, pueden surgir simultáneamente las fracciones $\frac{27}{54}$ y $\frac{1}{2}$.

Tal vez sea un buen momento para discutir otros ejemplos y llegar a la conclusión general de que si se toman a objetos de una colección, cuyo total es de b objetos, se tiene $\frac{a}{b}$ de la colección. Seguramente esto deberá analizarse con varios ejemplos y el docente evaluará la pertinencia de proponer o no la notación con letras. Si decidiera hacerlo, deberá asegurarse de que los alumnos puedan establecer puentes entre la notación con letras y los ejemplos numéricos.



6) Para cumplir con los pedidos del día, una confitería calcula que necesita usar 4 kg de harina. En el estante guardan 2 paquetes de $\frac{3}{4}$ kg, 2 paquetes de $\frac{1}{2}$ kg y 2 de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cómo podrías averiguar mediante un cálculo mental si la harina que tienen es suficiente?

7) Respondé las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo le explicarías a otro chico qué es $\frac{1}{9}$? ¿Y $\frac{1}{10}$?
- b) ¿Qué es mayor $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{5}$? ¿Por qué?
- c) ¿Cuántos $\frac{1}{5}$ se necesitan para formar 2?
- d) ¿Cuánto es la mitad de $\frac{1}{5}$?
- e) ¿Cuánto es el doble de $\frac{1}{8}$?

8) Completá los espacios en blanco:

- a) $\frac{3}{4} + \dots = 1$
- b) $\frac{3}{4} + \dots = 2$
- c) $\frac{3}{4} + \dots = 3$
- d) $\frac{5}{7} + \dots = 1$
- e) $\frac{5}{7} + \dots = 2$
- f) $\frac{5}{7} + \dots = 4$
- g) $\frac{7}{5} - \dots = 1$
- h) $\frac{9}{4} - \dots = 2$
- i) $\frac{9}{4} - \dots = 1$

9) Analizá qué numeradores o denominadores podrían tener cada una de las siguientes fracciones para que sean menores que 1 y cuáles podrían tener para que sean mayores que 1. Anotá ejemplos en los casilleros correspondientes:

Fracción a completar	Fracciones menores que 1	Fracciones mayores que 1
$\frac{5}{\dots}$		
$\frac{3}{\dots}$		
$\frac{4}{\dots}$		
$\frac{7}{\dots}$		
$\frac{11}{\dots}$		
$\frac{25}{\dots}$		
$\frac{134}{\dots}$		
$\frac{\dots}{98}$		

10) Anotá estos números como una sola fracción:

- a) $2 + \frac{3}{4}$
- b) $5 + \frac{2}{3}$
- c) $4 + \frac{3}{5}$
- d) $10 + \frac{4}{6}$
- e) $11 + \frac{3}{7}$
- f) $8 + \frac{4}{10}$

11) Anotá estas fracciones como sumas de un número entero más una fracción menor que 1:

- a) $\frac{8}{5}$
- b) $\frac{17}{6}$
- c) $\frac{20}{3}$
- d) $\frac{22}{9}$
- e) $\frac{29}{4}$
- f) $\frac{65}{8}$
- g) $\frac{62}{3}$
- h) $\frac{58}{10}$
- i) $\frac{102}{10}$
- j) $\frac{115}{100}$

12) Indicá, en cada caso, cuál de las fracciones es la más cercana a $\frac{1}{2}$:

- a) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}$

13) Decidí, sin averiguar el resultado, si es posible que

- a) $3 - \frac{2}{3}$ dé un resultado menor que 2
- b) $\frac{5}{2} - \frac{1}{4}$ sea menor que 2
- c) $\frac{1}{4} + \frac{7}{5}$ sea menor que 1
- d) $\frac{2}{5} + \frac{2}{10}$ sea mayor que 1
- e) $\frac{2}{5} + \frac{2}{10}$ sea mayor que $\frac{1}{2}$
- f) $\frac{17}{19} + \frac{21}{23}$ sea mayor que 2

Para cada caso, pensá cómo explicar las razones de tu respuesta.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Y 13

El problema 6 propone sumar mentalmente diferentes cantidades. Una forma de pensar esta suma sería agrupar primero cada uno de los paquetes de $\frac{3}{4}$ kg con los paquetes de $\frac{1}{4}$ kg. Como hay 2 paquetes de cada una de las clases se obtienen 2 kg. Como, además, hay también 2 paquetes de $\frac{1}{2}$ kg se forman 3 kg.

Otra forma de pensarlo podría ser descomponer los paquetes de $\frac{3}{4}$ kg en $\frac{1}{2}$ kg + $\frac{1}{4}$ kg, y de esa manera asociar cada uno de los cuartos con los otros paquetes de $\frac{1}{4}$ kg para tener $\frac{1}{2}$ kg.

Así quedarían en total 6 paquetes de $\frac{1}{2}$ kg. Como cada 2 paquetes de $\frac{1}{2}$ kg se obtiene 1 kg, hay en total 3 kg. La intención es que empiecen a circular relaciones y resultados ya estudiados cuya disponibilidad será un punto de apoyo para avanzar.

El problema 7 apunta a recuperar conceptos vistos en años anteriores. Se esperan argumentos del tipo:

- $\frac{1}{9}$ es la fracción que entra 9 veces en el entero;
- $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{5}$ porque para formar un entero con tercios se necesitan 3 partes iguales y en el caso de los quintos se necesitan 5;
- la mitad de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{10}$ porque necesito 2 veces $\frac{1}{10}$ para tener $\frac{1}{5}$.

Poner a los alumnos en situación de explicar a un "otro" les exige seleccionar cuáles son los aspectos que "arman" una explicación. Esto no es fácil y tampoco puede ser elaborado por los alumnos "en soledad". Es a través de la discusión colectiva y de la intervención del maestro que se podrán ir estableciendo criterios comunes respecto de "qué es explicar".

Notemos que se pide una explicación descontextualizada. Aunque los alumnos puedan apelar a diferentes contextos para proponer sus explicaciones, la intención de la tarea es promover la idea de que las fracciones son números sobre los que se pueden establecer relaciones de manera independiente de los contextos particulares. Es éste también el objetivo de los problemas siguientes.

El problema 9 ofrece la posibilidad de recuperar una regla seguramente ya establecida: se espera que los alumnos se den cuenta de que, si el denominador es menor que el numerador, la fracción será mayor que 1. Los alumnos deberán, además, ocuparse de la cantidad de soluciones posibles: cuando se trata de completar el denominador, para formar una fracción mayor que 1, hay tantas posibilidades como números (naturales) menores que el numerador. Para formar una fracción menor que 1, el denominador puede ser cualquier número mayor que el numerador. Por tanto, hay infinitas soluciones posibles.

Análogamente, se podrá analizar qué sucede cuando se trata de completar el numerador: existen infinitas soluciones para escribir fracciones mayores que 1 y una cantidad finita —tantas como números menores que el denominador— para escribir fracciones menores que 1.

El problema 10 retoma la posibilidad de expresar un número natural como una fracción de cualquier denominador. Usando esa idea, $4 + \frac{3}{5}$ podría pensarse así:

como un entero son $\frac{5}{5}$, esta expresión es equivalente a $\frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{3}{5}$, o sea, $\frac{23}{5}$.

Pero también podrían sistematizar que si 1 entero es igual a $\frac{5}{5}$, en 4 enteros hay 4 veces $\frac{5}{5}$; $4 \times \frac{5}{5}$ es igual a $\frac{20}{5}$. Si a esto se le agregan los $\frac{3}{5}$ restantes, se obtiene la fracción $\frac{23}{5}$.

El problema 11 supone ubicar en un primer paso la fracción entre 2 enteros o bien pensar cuál es la mayor cantidad de enteros que se pueden formar, ya que esto garantizará que la fracción restante sea menor que 1.

En el caso de $\frac{8}{5}$, por ejemplo, se podría analizar que $\frac{5}{5}$ forman 1 entero y $\frac{10}{5}$ forman 2 enteros; por tanto, 1 es la mayor cantidad de enteros que se puede formar. Para ello, se emplean 5 de los $\frac{8}{5}$; en consecuencia, $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$.

El problema 13 ubica a los alumnos en posición de analizar la expresión para establecer el valor de verdad de una proposición sin hacer el cálculo. Notemos que cuando tienen que hacer un cálculo se debe aplicar un procedimiento ya identificado. En cambio, en este caso los alumnos deben decidir por sí mismos qué relaciones establecer para obtener una conclusión. Así, por ejemplo, para el ítem a) se espera que analicen que, como $\frac{2}{3}$ es menor que 1, si a 3 se le resta $\frac{2}{3}$, el resultado será mayor que 2, ya que para obtener un resultado menor que 2 sería necesario restar a 3 una fracción mayor que un entero.

Es posible que los alumnos no tengan mucha práctica en la elaboración de esta clase de razonamientos. Para que el problema se constituya verdaderamente en una oportunidad de producir este tipo de relaciones, el maestro tendrá que favorecer la circulación en la clase de las distintas propuestas de los alumnos, someterlas a la discusión de todos e intervenir él mismo proponiendo contraejemplos para las relaciones erróneas, sugiriendo ideas o preguntas, mostrando eventualmente cómo piensa él algunos de los casos. La potencia de este ejercicio radica en la posibilidad de hacer análisis similares al descripto y explicitar estos análisis como lo propone la segunda parte del ejercicio.

El total de los problemas propuestos hasta acá se concibe como un modo de difundir en la clase muchas ideas que los alumnos han tratado en años anteriores. Sin embargo, no es cuestión solamente de recordar lo que los alumnos ya sabían. Volver a revisar estos conceptos supone también hacer nuevas relaciones, volver más densa la trama de cuestiones a las que estos conceptos pueden dar lugar.

Al finalizar la actividad se pueden anotar colectivamente los aspectos trabajados:

- fracción de una colección,
- obtención del entero conociendo una fracción de éste,
- fracciones mayores y menores que 1,
- ubicación de una fracción entre dos enteros,
- expresión de un número entero como una fracción,
- estimación de resultados de sumas y restas con fracciones.

Con esta actividad se propicia el surgimiento de estrategias para ordenar una serie de fracciones, ubicar las fracciones entre enteros y, por último, interpolar una fracción entre dos fracciones dadas.



**RELACIÓN DE ORDEN ENTRE FRACCIONES
PROBLEMAS**

1) Estos números se encuentran entre 0 y 3. Ubícalos en la columna que corresponde.

$$\frac{3}{7}, \frac{8}{3}, \frac{4}{5}, \frac{11}{4}, \frac{21}{35}, 1\frac{5}{7}, \frac{9}{5}, \frac{17}{7}, \frac{14}{5}, \frac{11}{9}$$

Entre 0 y 1	Entre 1 y 2	Entre 2 y 3

2) ¿Entre qué números enteros se ubican las siguientes fracciones?

$$\frac{47}{4}, \frac{28}{3}, \frac{33}{7}, \frac{84}{9}, \frac{9}{5}, \frac{85}{12}, \frac{125}{10}$$

3) Encontrá si son posibles las fracciones que a continuación se detallan y si no fuera posible explicá por qué:

- una fracción con denominador 3 entre 0 y 1
- una fracción con denominador 5 entre 4 y 5
- una fracción con numerador 1 entre 0 y 1
- una fracción con numerador 2 entre 1 y 2
- una fracción con numerador 2 entre 3 y 4

4) La siguiente lista de fracciones está ordenada de menor a mayor. ¿Dónde ubicarías $-\frac{1}{2}$? ¿Y $1\frac{5}{7}$?

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{4}, \frac{12}{8}, \frac{15}{8}, \frac{19}{7}$$

5) Intercalá una fracción entre cada par de números:

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{12} & \frac{6}{12} \\ \frac{4}{5} & 1 \end{array}$$

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4 Y 5

Los problemas 1 y 2 en los que la cuestión es ubicar fracciones entre dos enteros, pueden ser resueltos por los alumnos si descomponen la fracción como la suma de fracciones equivalentes a números enteros más la fracción restante. Esto se apoya en algunos de los problemas de la actividad 1.

Tomemos la cuestión de ubicar $\frac{11}{4}$. Este número puede ser pensado como $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4}$; o sea, como $2 + \frac{3}{4}$; lo cual autoriza a decir que $\frac{11}{4}$ está entre 2 y 3.

A su vez, el análisis de esta estrategia puede llevar a establecer un procedimiento más económico. Por ejemplo, para $\frac{11}{4}$, ¿cuántas veces entra 4 en 11? Entra 2 veces enteras, para lo cual "usé" 8 de los 11 cuartos en cuestión, restando aun $\frac{3}{4}$. Esto permite expresar más directamente $\frac{11}{4}$ como suma de $\frac{8}{4} + \frac{3}{4}$.

La pregunta "¿cuántas veces entra?" se resuelve matemáticamente con una división; en efecto, 11 dividido 4 tiene cociente 2 (los enteros que se pueden formar) y resto 3 (los cuartos que no llegan a formar otro entero). Se ve que este camino articula estrategias más "artesanales" con el conocido procedimiento de dividir el numerador por el denominador para expresar una fracción como número mixto.

G.C.B.A.

Será interesante hacer notar a los alumnos que la forma "número mixto" permite ubicar rápidamente la fracción entre dos enteros. De manera transversal se difunde una idea potente para el trabajo matemático actual y futuro: algunas escrituras muestran aspectos de un cierto objeto que otras no muestran tan claramente.

El problema 3 tiene sentido si se da un tiempo suficiente de exploración; no hay "chances" de que los alumnos respondan "de entrada".

Para el primer caso, al buscar fracciones con denominador 3 es probable que los alumnos vayan ensayando: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$... Se espera que reparen en que no vale la pena continuar la serie pues $\frac{3}{3}$ ya es equivalente a 1 y las otras fracciones con denominador 3 son mayores que 1. Por tanto, hay 2 fracciones con denominador 3 entre 0 y 1. Se hace notar que el problema pone a los alumnos en situación de obtener una conclusión referida a un conjunto infinito: de todas las fracciones con denominador 3, las únicas que están entre 0 y 1 son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Esta es la riqueza que se le atribuye al problema: producir un argumento que permita estar seguro, sin ensayar caso por caso.

Para ubicar fracciones entre 4 y 5 con denominador 5, "conviene" expresar el 4 y el 5 como fracciones con denominador 5, de esta manera 4 es equivalente a $\frac{20}{5}$ y 5 es equivalente a $\frac{25}{5}$. No se trata de un problema de respuesta inmediata para los alumnos. Si el docente decide plantearlo en la clase, deberá prever un tiempo importante de exploración. A nuestro juicio ese trabajo de exploración es en sí mismo productor de nuevas relaciones y, en ese sentido, el tiempo invertido "vale lo que cuesta".

Los dos últimos ítemes del problema 3 son bastante más complejos, el docente decidirá si los propone o no.

En ninguno de los casos es posible encontrar fracciones con las condiciones que se piden. Por ejemplo, no es posible encontrar fracciones con numerador 2 entre 3 y 4, ya que $\frac{2}{2}$ es equivalente a 1 y a medida que "se agrandan" los denominadores la fracción se aleja cada vez más del 1, achicándose.

Nuevamente los alumnos se ven en situación de producir un argumento que asegure una conclusión sobre un conjunto infinito, ya que no es posible la exploración caso por caso.

Los problemas 4 y 5 reinvierten todas las estrategias utilizadas acerca de las equivalencias y la comparación de fracciones.

En el problema 4, una posible estrategia para ubicar $\frac{1}{2}$ dentro de una serie de fracciones ya ordenadas es ir comparándola con cada una de las fracciones. La primera fracción $\frac{2}{5}$ es menor que un medio ya que 1 entero es equivalente a $\frac{5}{5}$. La mitad de $\frac{5}{5}$ es igual a $\frac{2}{5}$ y medio quinto más. Más exactamente, la mitad de $\frac{5}{5}$ es igual a $\frac{2}{5} + \frac{1}{10}$. La fracción que sigue es $\frac{4}{7}$. Si se sigue el mismo razonamiento anterior, la mitad de $\frac{7}{7}$ es $\frac{3}{7} + \frac{1}{14}$; por tanto, $\frac{1}{2}$ se ubica entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$.

En el problema 5 probablemente no será un obstáculo intercalar una fracción entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{5}$. A la hora de hacerlo, entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ será necesario buscar fracciones equivalentes que permitan la interpolación de fracciones. No sería extraño que en una primera instancia los alumnos piensen que el problema no tiene solución, sobre todo en este caso en el que aun pensando a $\frac{1}{2}$ como $\frac{2}{4}$, no es posible hallar una fracción con denominador 4 entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$. El maestro podrá plantear la necesidad de seguir trabajando con las equivalencias analizando, por ejemplo: cómo es la fracción $\frac{5}{8}$ en relación con las fracciones da-

das. La idea es comenzar a analizar que siempre se pueden intercalar fracciones entre dos dadas. Entra aquí en juego la noción de densidad, noción difícil, de elaboración muy lenta y acerca de la cual este problema constituye apenas una primera aproximación. Será interesante señalar la diferencia entre esta situación y la que se plantea en el problema 3: entre dos fracciones dadas, existen infinitas fracciones (caso que se plantea en el problema 5) pero, si se impone alguna otra condición (como en el problema 3), puede ser que haya una cantidad finita de fracciones o ninguna fracción.

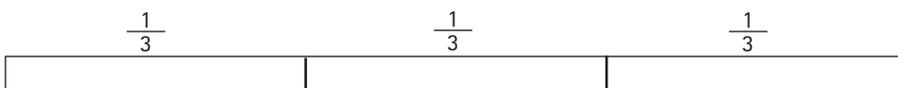
Fracciones en la recta numérica

Actividad 3

Como se señala en *Matemática. Fracciones y números decimales. 5º grado. Apuntes para la enseñanza*, la representación de fracciones sobre la recta numérica constituye un ámbito sumamente fructífero para poner en juego las relaciones construidas sobre estos números: como recurso para comparar fracciones, para determinar entre cuáles enteros se encuentra una fracción, para proponer fracciones entre otras dadas, para representar sumas y restas. Sin embargo, debemos partir de reconocer la dificultad que supone para los alumnos comprender esta representación. Efectivamente, para representar fracciones sobre un eje deben comprender por qué los números se anotan no sólo ordenados sino conservando una cierta escala que puede variar de una representación a otra. También será necesario que comprendan que dicha escala se determina fijando la posición del 0 y del 1 o, más generalmente, fijando la posición de dos números cualesquiera.

Resulta también difícil para los alumnos la idea de que un punto representa un número y ese número a la vez representa la distancia al 0 en la escala elegida.

Notemos que en las representaciones iniciales de fracciones, cuando un entero está dividido en partes iguales, cada parte representa el mismo número:



En cambio, en la recta, el primer tramo es $\frac{1}{3}$, el segundo $\frac{2}{3}$ y el tercero $\frac{3}{3}$; o sea, 1.



Será importante contrastar estos aspectos con los alumnos como un modo de contribuir a la comprensión de esta forma de representación.

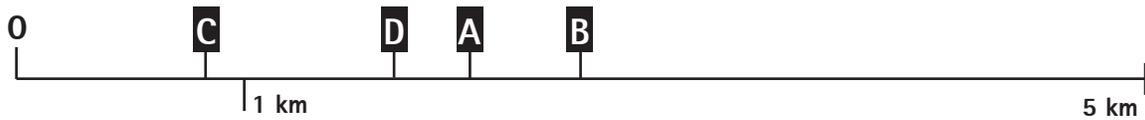
Por otra parte, también es difícil aceptar que un punto (un número) admite diferentes escrituras.

Más adelante se llegará a la generalización de que números racionales equivalentes tienen la misma ubicación en la recta numérica.

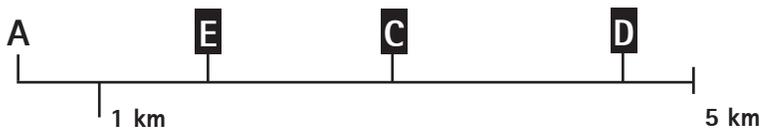
Dada la complejidad que acabamos de señalar, proponemos iniciar el trabajo con rectas numéricas partiendo de situaciones que las contextualicen para descontextualizar posteriormente los conocimientos así construidos.



- 1) El club Luna de Avellaneda organizó una carrera. Pondrán algunos carteles que indiquen a los corredores qué parte del recorrido llevan ya realizado. A continuación, aparece una representación de la pista y de los lugares donde quieren ubicar los carteles. (Véase *Páginas para el alumno*, pág 16, Línea de 12 cm, carteles de largada y llegada; los carteles en blanco están ubicados a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ del recorrido.)
- Completá qué deberían decir los carteles en blanco.
 - Un grupo de chicos pensó en hacer una broma a los corredores y poner muchos de esos carteles sobre la pista: ¿dónde ubicarías otros carteles que dijeran $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{35}{35}$?
 - Proponé ubicaciones de carteles para que tus compañeros digan qué deberían decir. Intercámbiense los.
- 2) Se organizó una maratón de 5 km. A continuación aparece una representación del recorrido. (Segmento de 15 cm de largo, con 0 –en el extremo izquierdo– y 1 –a 3 cm– marcados. Además, algunos puntos indicados: A a 6 cm; B a 7,5 cm; C a 2,5 cm; D a 5 cm.)



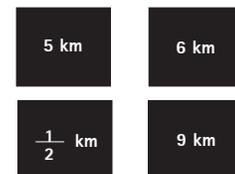
- ¿Dónde ubicarías carteles que indiquen: $\frac{1}{2}$ km; $\frac{17}{5}$ km; $\frac{13}{3}$ km?
 - ¿Qué deberían decir los carteles ubicados en los puntos que aparecen señalados?
- 3) A continuación aparece una representación de una ruta que va desde la ciudad A hasta la ciudad B. A lo largo del camino, aparecen carteles indicadores de la distancia del cartel hasta la ciudad A.



¿Qué deberían decir los carteles ubicados en los puntos señalados?

- 4) A continuación una ruta que va desde una ciudad M hasta una ciudad P. (Segmento de 9 cm con M y P en los extremos, y los siguientes puntos marcados: a 1 cm del extremo izquierdo debe decir "1 km"; C a 0,5 cm del extremo izquierdo; D a 5 cm; E a 6 cm; F a 8 cm y G a 7,5 cm.)

¿Dónde irían ubicados los siguientes carteles?



- 5) Esta es la representación de otra ruta que parte desde la ciudad H y llega hasta la ciudad Z. En la ruta se marcan las distancias (en km) hasta la ciudad H.



- ¿Dónde habría que marcar la ciudad Z si se encuentra a $4\frac{2}{3}$ km de H?
- ¿Dónde ubicarías un cartel que dijera " $2\frac{1}{6}$ km"?

- 6) Esta es la representación de otra ruta que parte desde la ciudad J y llega hasta la ciudad K. ¿Dónde ubicarían el cartel de la ciudad que está a "1 km" de J y el cartel que indica la ciudad K que está a $3\frac{2}{10}$ km de J?



ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4, 5 Y 6

Como primer punto en el análisis colectivo de las resoluciones se explicará que la línea que allí aparece es una representación de la pista hecha a escala, es decir que la longitud de la pista real y la del dibujo no son las mismas, pero que sí se conservan las relaciones entre las distancias de los diferentes carteles en ambas pistas: la real y la representada.

Será necesario que los alumnos comprendan qué significa que "se conservan las relaciones". Por ejemplo, si en la realidad una distancia es el doble de la otra, esta relación debe conservarse en la representación.

Para completar los carteles en la primera pista, cuestión propuesta en el problema 1 a) puede establecerse la medida que existe entre la largada y la llegada, medida que corresponde al total de la pista, o la medida que corresponde a la distancia entre la largada y la mitad de la pista. Esto da lugar a dos razonamientos diferentes: la distancia entre la largada y el primer cartel entra 4 veces en el total; o sea, que el primer cartel indica $\frac{1}{4}$ de la carrera.

Pero también puede establecerse que la distancia entre la largada y el primer cartel entra 2 veces entre la largada y la mitad de la carrera, de manera que esa distancia es la mitad de $\frac{1}{2}$, o sea, $\frac{1}{4}$.

Del mismo modo, la distancia entre la largada y el segundo cartel que se debe completar entra 3 veces en el total de la recta, por tanto el segundo cartel debería decir $\frac{1}{3}$. Pero también podría considerarse la distancia entre el cartel que marca $\frac{1}{4}$ y este nuevo cartel. Esta distancia entra 12 veces a lo largo de toda la pista, en consecuencia es $\frac{1}{12}$. Así, el segundo cartel se encuentra a $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$; es decir, a $\frac{4}{12}$ de la pista que equivale a $\frac{1}{3}$ de ella.

Las relaciones anteriormente expuestas pueden ser un punto de apoyo para ubicar las fracciones que se proponen en el problema 1 b).

Antes de establecer la ubicación precisa, será interesante pedir que los alumnos la anticipen globalmente. En estas anticipaciones se producen relaciones que ayudan a elaborar estrategias para representar la fracción. Por ejemplo, para $\frac{5}{6}$, podrán establecer que está entre $\frac{1}{2}$ y 1, y que está más cerca de 1 porque sólo le falta $\frac{1}{6}$ para alcanzarlo. Para determinar la ubicación, podrán hallar la longitud de $\frac{1}{6}$ y luego contar 5 de estas partecitas desde 0 o contar hacia atrás una sola desde 1. A propósito de la discusión sobre la ubicación de $\frac{35}{35}$, se podrá solicitar a los alumnos que propongan otras maneras de nombrar ese punto.

En el caso del problema 2, en la discusión colectiva se retomarán las relaciones establecidas a propósito del problema 1). El docente podrá preguntar por

qué, en el problema 1, $\frac{1}{2}$ aparecía marcado a los 6 cm y aquí a 1,5 cm del punto de partida. Deberá quedar claro, por un lado, que son representaciones construidas a diferente escala y, por otro, que se trata de unidades diferentes (la totalidad del recorrido en el primer caso; un kilómetro en el segundo).

4 Actividad Relación de orden entre fracciones. Otra vuelta

Esta actividad se centra en la producción de criterios para comparar fracciones. Probablemente en los grados anteriores los alumnos hayan desarrollado algunas estrategias, más o menos generales. Muchas veces las estrategias que se ponen en juego dependen de los números en cuestión. Se propone ahora avanzar sobre este aspecto, alentando a los alumnos a que encuentren nuevas estrategias.

La discusión sobre la validez de distintos criterios para comparar fracciones es el último punto de la actividad. Se busca promover un trabajo sobre reglas generales a partir del análisis de criterios parciales que, en principio, no se pusieron necesariamente en juego con una perspectiva de generalidad. Esta posición en la que los alumnos analizan un tramo de lo realizado para sintetizarlo en un conjunto de leyes generales contribuye a que tengan una perspectiva cada vez más general. Éste es uno de los aspectos formativos del trabajo matemático que se busca.



RELACIÓN DE ORDEN ENTRE FRACCIONES. OTRA VUELTA PROBLEMAS

- 1) Proponé 2 fracciones menores y 2 fracciones mayores que $\frac{1}{2}$, y explicá cómo llegaste a esa elección.
- 2) Proponé 2 fracciones menores que $\frac{1}{4}$ y 2 fracciones mayores que $\frac{1}{4}$.
- 3) Un ferretero tiene dos frascos con clavos del mismo tipo. En uno de ellos, la etiqueta dice $\frac{7}{8}$ kg y en el otro la etiqueta dice $\frac{9}{10}$ kg. ¿Qué frasco contiene más clavos?
- 4) En los supermercados frecuentemente tienen bolsas de fruta de diferentes pesos. La mamá de Nico quería hacer dulce y necesitaba $\frac{3}{4}$ kg de manzanas.
¿Cuáles de las siguientes bolsas de manzanas puede comprar Nico seguro de que a su mamá le alcanzarán para hacer el dulce?

$\frac{4}{5}$ kilogramos

$\frac{7}{6}$ kilogramos

$\frac{2}{3}$ kilogramos

- 5) Indicá con el signo mayor (>); menor (<) ó igual (=):

a) $\frac{25}{18}$ $\frac{25}{10}$

b) $\frac{15}{45}$ $\frac{8}{16}$

c) $\frac{9}{36}$ $\frac{12}{40}$

d) $\frac{47}{48}$ $\frac{34}{35}$

e) $\frac{75}{90}$ $\frac{28}{15}$

f) $\frac{35}{100}$ $\frac{25}{10}$

g) $\frac{16}{32}$ $\frac{40}{80}$

h) $\frac{12}{22}$ $\frac{14}{30}$

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4 Y 5

A través de los primeros cuatro problemas se busca promover la producción de criterios "locales", es decir, criterios útiles para esas fracciones pero no necesariamente aplicables a cualquier par de fracciones. Esta idea de poner a los alumnos a analizar cada situación justamente intenta alentar la producción de relaciones que profundicen su relación con el tema.

Al pedirles que busquen fracciones mayores y menores que $\frac{1}{2}$ y mayores y menores que $\frac{1}{4}$ (problemas 1 y 2) pondrán en juego criterios basados en la relación entre el numerador y el denominador, que después serán útiles para comparar otros pares de fracciones.

Por ejemplo, una vez establecido que, si el numerador de una fracción es mayor que la mitad del denominador, la fracción es mayor que $\frac{1}{2}$, se podrá usar esta relación para comparar otras fracciones con respecto a $\frac{1}{2}$; por ejemplo, para comparar $\frac{12}{22}$ y $\frac{14}{30}$, la primera es mayor que $\frac{1}{2}$ y la segunda es menor, con lo cual $\frac{12}{22}$ es mayor que $\frac{14}{30}$.

Los alumnos también encontrarán en esta actividad los límites que tienen algunos de los criterios usados ya que son útiles en algunos casos y no en otros. Por ejemplo, en el problema 3, es posible comparar $\frac{7}{8}$ con $\frac{9}{10}$ si se establece cuánto falta en cada caso para el 1: al primer frasco le falta $\frac{1}{8}$ kg para completar el kg y al segundo le falta menos porque le falta $\frac{1}{10}$ de kg. Se establece entonces que $\frac{9}{10}$ es mayor que $\frac{7}{8}$ porque está más cerca de 1.

Sin embargo, este criterio no sería conveniente para comparar fracciones como $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{9}$, donde comparar lo que les falta para llegar al entero tiene la misma dificultad que comparar las fracciones originales.

En el problema 5 se ponen en juego diferentes criterios: comparar con $\frac{1}{2}$ ó con 1, establecer cuánto falta para 1, simplificar las fracciones para luego compararlas, establecer una relación entre el numerador y el denominador, etc. Está claro que no todos los alumnos usarán los mismos criterios en cada caso y esto justamente enriquece el problema.

A continuación, se presentan dos problemas que el docente podría proponer luego de trabajar los anteriormente mencionados con el objetivo de apuntar a conclusiones generales respecto de la comparación de fracciones.



RELACIÓN DE ORDEN ENTRE FRACCIONES. OTRA VUELTA
PROBLEMAS

- 6) En los ejercicios anteriores encontraron muchos pares de fracciones para comparar. Hagan una lista de reglas que sirvan para comparar fracciones.
- 7) Un grupo de chicos anotó una serie de reglas para comparar fracciones. Señalá cuáles te parece que
- sirven siempre,
 - sirven parcialmente,
 - no sirven nunca.

En cada caso, explicá por qué

¿Les parece que esta regla sirve para comparar fracciones?	Siempre	Parcialmente	Nunca
1) Considerar sólo entre qué enteros se encuentran.			
2) Si dos fracciones tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.			
3) Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.			

¿Les parece que esta regla sirve para comparar fracciones?	Siempre	Parcialmente	Nunca
4) Si las dos fracciones se encuentran entre los mismos enteros, conviene considerar a qué distancia están del entero o de otra fracción del entero, como $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$; etcétera.			
5) Si una fracción tiene su numerador mayor que su denominador, es seguro que será mayor que otra fracción que tenga su numerador menor que su denominador.			
6) Para comparar fracciones se pueden buscar fracciones equivalentes a las que se trata de comparar; o sea, que tengan el mismo denominador, y aplicar la regla 2.			
7) Si una fracción tiene el numerador y el denominador mayores que los de otra, seguro es mayor.			

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 6 Y 7

El problema 6 invita a la explicitación de los criterios usados y el problema 7 apunta a que los alumnos establezcan su alcance. En la discusión, el docente deberá tener presente que muchas veces para los alumnos es difícil reconocer una regla como inválida aunque sólo se cumpla para algunos casos particulares.

Una forma de completar este trabajo sería detenerse en los casos que sirven parcialmente: por ejemplo, considerar entre qué enteros se encuentran las fracciones es útil cuando las fracciones que se comparan se hallan entre diferentes enteros.

Además de mostrar contraejemplos, el docente necesitará volver a resaltar que el tamaño de una fracción depende de la relación entre el numerador y el denominador y no de considerarlos aisladamente.

En esta actividad se propone recuperar las estrategias de cálculo vistas en años anteriores en relación con la suma y la resta de fracciones.



OPERACIONES CON FRACCIONES

PROBLEMAS

- 1) Un corredor se entrena en una pista. Él afirma que en la primera etapa de la carrera recorrió $\frac{1}{3}$ de la pista, y en la segunda y última etapa recorrió los $\frac{3}{4}$ restantes. ¿Es esto posible?
- 2) De una jarra que contiene $2\frac{1}{4}$ litro de agua llené dos vasos de $\frac{1}{4}$ litro cada uno y un vaso de $\frac{1}{3}$ de litro. ¿Cuánta agua quedó en la jarra?
- 3) A Juan le proponen que elija la bolsa de golosinas más pesada. La primera bolsa pesa $3\frac{1}{2}$ kg y la segunda pesa $\frac{20}{6}$ kg. ¿Cuál pensás que habrá elegido Juan? ¿Cuánto pierde si elige mal?
- 4) ¿Cuánto hay que agregar a $\frac{3}{4}$ para obtener $\frac{4}{5}$?
- 5) ¿En cuánto excede $\frac{7}{9}$ a $\frac{2}{5}$?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4 Y 5

A partir de la resolución de estos problemas se espera hacer un recorrido de las estrategias utilizadas por los alumnos para sumar y restar fracciones y recuperar un procedimiento general para sumar y restar fracciones.¹ El procedimiento propuesto transforma las fracciones que intervienen en el cálculo en fracciones equivalentes del mismo denominador.

Multiplicación y división de una fracción por un número natural

Las relaciones de proporcionalidad directa constituyen un ámbito a partir del cual repensar aspectos sobre el funcionamiento de las fracciones. En particular brindan un contexto en el que apoyarse para resolver operaciones de multiplicación y división de fracciones por números naturales (y de números naturales por fracciones).

Para abordar estos problemas es conveniente que los alumnos puedan partir de la siguiente idea: en una relación de proporcionalidad directa se cumple que al doble de una cierta cantidad le corresponde el doble del correspondiente de dicha cantidad, al triple le corresponde el triple y, en general, cuando una de las cantidades se multiplica o divide por un número, la cantidad correspondiente se multiplica o divide por el mismo número. Es claro que no se espera esta formulación por parte de los alumnos pero sí se requerirá que sean capaces de poner en juego estas relaciones.

Los siguientes problemas apuntan a que los alumnos traten la multiplicación y la división de fracciones por un número natural, apoyados en contextos que favorecen la puesta en juego –seguramente implícita– de propiedades de la proporcionalidad directa.

¹ Algunas de ellas se encuentran analizadas en *Matemática. Fracciones y números decimales. 5º grado. Apuntes para la enseñanza.*



PROBLEMAS

1) Completá las siguientes tablas:

Tabla 1

Esta tabla relaciona la cantidad de leche necesaria para la receta de un flan, según la cantidad de porciones que se desea obtener. Para esta receta se calcula $\frac{1}{4}$ litro de leche para 3 porciones.

Cantidad de porciones	10	8	5	6	2	3
Leche necesaria (en litros)						$\frac{1}{4}$

Tabla 2

Esta tabla relaciona la cantidad de personas invitadas a un asado con la cantidad de carne que habrá que comprar. Para el asado se calcula $\frac{1}{2}$ kg de carne cada 3 personas.

Cantidad de personas	2	3	4	6	8	10
Cantidad de carne necesaria (en kg)		$\frac{1}{2}$				

Tabla 3

En otro asado, calculan $\frac{3}{4}$ kg de carne cada 3 personas.

Cantidad de personas	2	3	4	6	8	10
Cantidad de carne necesaria (en kg)		$\frac{3}{4}$				

Tabla 4

La siguiente tabla relaciona la distancia que recorre un robot de juguete según la cantidad de pasos que da. El robot da pasos de $\frac{7}{5}$ de centímetro.

Cantidad de pasos que da el robot	1	5	10	12				200	1.000
Distancia que recorre (en cm)	$\frac{7}{5}$				70	100	200		

2) Dos amigos discuten acerca de la cantidad de achuras necesarias para 6 personas invitadas a un almuerzo sabiendo que se calculan $\frac{3}{4}$ kg cada 4 personas.

El primero piensa lo siguiente:

- La mitad de $\frac{3}{4}$ es $\frac{3}{8}$, por tanto, para 6 personas hacen falta $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$ ó $\frac{9}{8}$.

El otro piensa así:

- La mitad de $\frac{3}{4}$ es $\frac{3}{8}$ y la mitad de $\frac{3}{8}$ es $\frac{3}{16}$. Eso es lo que necesito por persona, entonces para 6 personas necesito $6 \times \frac{3}{16} = \frac{18}{16}$.

¿Son correctos ambos procedimientos? ¿Cómo justificás tu afirmación?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1 Y 2

Los problemas anteriores ponen en juego la multiplicación de un número natural por una fracción. Se trata de relaciones de proporcionalidad directa en las que la constante de proporcionalidad es un número fraccionario que se "aplica" a un número natural (cantidad de porciones para la tabla 1, cantidad de personas para las tablas 2 y 3, y cantidad de pasos para la tabla 4).

La idea es alentar a los alumnos a que primero vayan completando los casilleros más fáciles. Tomemos, por ejemplo, la tabla 1: para 6 personas (el doble de 3) se necesitará el doble de $\frac{1}{4}$ litro, o sea, $\frac{1}{2}$ litro. El cálculo para 2 personas se puede resolver haciendo la tercera parte de lo que se necesita para 6 personas; es decir, la tercera parte de $\frac{1}{2}$ litro. También se puede establecer la cantidad

necesaria para 2 personas, si se calcula primero la cantidad para 1 persona ($\frac{1}{4} : 3$) y luego el doble de esa cantidad. Puede ser que los alumnos necesiten un tiempo para hacer estos cálculos, pero es importante que el maestro sepa que ellos han podido elaborar a través de los distintos problemas todos los elementos para realizarlos y para probar si los resultados que proponen son o no válidos.

Es importante que las diversas estrategias posibles para completar las tablas "se acompañen" con los correspondientes cálculos sobre fracciones. Por ejemplo, de las dos maneras señaladas para establecer la cantidad de leche necesaria para dos personas, surgen los siguientes cálculos:

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6} ; \text{ o bien}$$

$$\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12} ; \frac{1}{12} \times 2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Para contribuir a que los alumnos elaboren estrategias de control, es fundamental que el docente señale que, por cualquiera de estos dos caminos, los resultados deben ser iguales, y que un modo de pensar el problema debe servir para verificar los cálculos que se corresponden con otro modo de pensarlo. La riqueza de relaciones que surgen es la fuente de elaboración de estrategias para operar con números racionales.

El docente podrá sugerir que se reúnan por parejas para comparar los resultados obtenidos y las estrategias que emplearon. También, pueden pasar en limpio todos los cálculos con fracciones que surgieron al completar las tablas con sus correspondientes resultados.

Pedir a los alumnos que encuentren la mayor cantidad de cálculos que surgen de las tablas tiene por objetivo poner en funcionamiento ese doble juego entre el contexto particular, las relaciones de proporcionalidad y las operaciones con números racionales. Se trata de que comprendan que, aunque no sepan las cuentas de una manera sistematizada, pueden de todos modos obtener los resultados gracias a lo que saben del contexto.

Una vez que las tablas se han completado, será necesario analizar globalmente cada una. La idea es establecer que, en cada tabla, se "pasa" del renglón de arriba al de abajo, multiplicando por un número fraccionario. Así, para la tabla 1, la cantidad de leche necesaria para una porción de flan es $\frac{1}{12}$, resulta entonces que multiplicando la cantidad de porciones por $\frac{1}{12}$ se obtiene la correspondiente cantidad de leche. Esta conclusión es el resultado de un análisis de la tabla ya hecha por caminos más "artesanales" y diversos, y no una condición previa para completarla. Justamente lo que se quiere comunicar es que los alumnos disponen de un conjunto de relaciones de base que permiten avanzar en la comprensión de los cálculos para luego sistematizar una estrategia general.



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL
PROBLEMAS

- 3) Laura, Aníbal y Julieta se pusieron de acuerdo: al terminar la fiesta dividirían el resto de la torta en tres partes iguales, una para cada uno. Completá la siguiente tabla que relaciona la fracción de torta que recibirá cada uno, según la cantidad de torta que sobró en la fiesta:

Fracción de torta que sobró en la fiesta	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	
Fracción de torta para cada uno				$\frac{1}{4}$

- 4) La siguiente tabla es parecida a la anterior, pero en este caso no se sabe entre cuántos

amigos se repartió la torta que sobró. ¿Podés averiguarlo?

Fracción de torta que sobró en la fiesta	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1
Fracción de torta para cada chico	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

- 5) Ahora armá una tabla como la anterior en la que la torta que sobra se reparte entre 5 amigos. Tenés que decidir qué números pondrás en la tabla. Seguramente tus compañeros no decidan incluir los mismos números que vos; eso no significa que las tablas estén mal.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 3, 4 Y 5

Estos tres problemas ponen en juego la división de una fracción por un número natural. En las primeras tablas se trata de relaciones de proporcionalidad directa con constante fraccionaria "aplicada" a números naturales. Ahora se trata de dividir fracciones por un número natural. La secuencia está pensada del siguiente modo: primero se completa una tabla, después se analiza una tabla ya completa para establecer cuál es la constante que transforma un número en su correspondiente y finalmente se pide a los alumnos que propongan una tabla dada la constante de proporcionalidad.

La primera de estas tareas es la más fácil y pone claramente en juego la división de una fracción por un número natural.

La segunda tarea es conceptualmente mucho más compleja: ya no se trata de hacer un cálculo sino de analizar un conjunto de pares para establecer una regularidad entre ellos: cuál es la operación (siempre la misma) que aplicada a $\frac{1}{2}$ da $\frac{1}{8}$, aplicada a $\frac{1}{3}$ da $\frac{1}{12}$, aplicada a $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{16}$, etc. Se trata de un cambio de posición del alumno: debe inferir una relación analizando un conjunto de datos. Seguramente el docente deberá señalar que esta tarea se relaciona con la anterior pero es diferente; una vez realizada será importante establecer con los alumnos semejanzas y diferencias entre los problemas 3 y 4.

Para el problema 5, es importante que el maestro insista en que pueden producirse tablas que tengan números distintos y que eso no significa que estén mal confeccionadas. Los chicos no están habituados a decidir qué números forman parte de los datos de un problema. Por lo general, en la tradición escolar, esta es una atribución del maestro, como también el hecho de adjudicarle, a un único enunciado para todo el grupo, los mismos valores. Será interesante en este caso analizar con los alumnos que, a pesar de ser números distintos, se cumplen las mismas relaciones en cada tabla y que eso permite estar seguros de que está bien hecha.

Sería conveniente sintetizar todas las relaciones producidas hasta el momento

sobre operaciones con fracciones, poniendo en discusión las formulaciones imprecisas, las relaciones erróneas, las distintas maneras que han surgido para expresar una misma cuestión, etc. Será útil que los alumnos vuelvan sobre sus primeras versiones y recojan los elementos ya identificados con toda la clase.

A partir de la división de fracciones de forma $\frac{1}{n}$ por un número natural —asunto que se ha tratado particularmente en los problemas 3, 4 y 5—, se espera que resuelvan otras divisiones aplicando o bien relaciones de proporcionalidad directa (por ejemplo, si se triplica la fracción, se triplica el cociente), o bien descomponiendo la fracción que se divide en suma de fracciones de forma $\frac{1}{n}$ y aplicando la propiedad distributiva de la división respecto de la suma, o bien aplicando esta propiedad a alguna otra descomposición conveniente de la fracción.

Por ejemplo, para $\frac{3}{7} : 2$

- a partir de $\frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{14}$, será posible establecer que $\frac{3}{7} : 2 = 3 \times (\frac{1}{7} : 2) = \frac{3}{14}$.
- Como $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$, $\frac{3}{7} : 2 = \frac{1}{7} : 2 + \frac{1}{7} : 2 + \frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$.
- Como $\frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}$, $\frac{3}{7} : 2 = \frac{2}{7} : 2 + \frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$.

Algunas de las afirmaciones que podrían quedar registradas:

- Para dividir una fracción de numerador 1 por un número natural, multiplico el denominador por el número natural. Por ejemplo, $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$.
- Para dividir una fracción por un número natural "me conviene" apoyarme en una fracción de numerador 1.
- La multiplicación de una fracción por un número natural se puede pensar como una suma de varias fracciones iguales.
- Etcétera.

Multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad directa

7

Actividad

Estos problemas intentan una primera aproximación a la multiplicación de fracciones basada en las relaciones de proporcionalidad directa, continuando el trabajo que se realizó para la multiplicación y la división de fracciones por un número natural.

Estas relaciones ya fueron tratadas en la actividad anterior en la que se establecían relaciones entre números naturales y fracciones. El avance que ahora se propone es el de relacionar fracciones con fracciones. Efectivamente, en esta secuencia se incluirán tablas de proporcionalidad con constante fraccionaria con la intención de apoyarnos en este contexto para validar los resultados de diferentes operaciones e ir identificando así un procedimiento general para multiplicar fracciones.

Una pregunta legítima que el docente puede hacerse es acerca del sentido de plantear un trabajo tan complejo cuando el algoritmo de la multiplicación de fracciones es "sencillo" y podría usarse una estrategia más económica para enseñarlo. Nuestra respuesta frente a esto es que la actividad propuesta apunta a que el alumno acceda a una cierta fundamentación del algoritmo de la multiplicación y no sólo a su mecanismo.



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES EN EL CONTEXTO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROBLEMA

- 1) Completá la siguiente tabla que vincula la cantidad de helado que es necesario comprar en función de los invitados que asistirán a una fiesta, sabiendo que para cada invitado se calcula la misma cantidad.

Cantidad de personas invitadas	4	8	2	
Cantidad de helado que es necesario comprar (kg)	1			$\frac{1}{4}$

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1

Es relativamente sencillo establecer a esta altura que la relación que subyace a la tabla es $\frac{1}{4}$ kg de helado por persona. Completar una primera tabla sencilla permite identificar una serie de cálculos y da lugar a que los alumnos consoliden el "juego" de reconocer cálculos una vez completada la tabla.

En este caso se puede identificar que

$$4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$8 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Eventualmente el docente podrá proponer otros cálculos referidos al mismo contexto, que no se hayan incluido en la tabla.



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES EN EL CONTEXTO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROBLEMA

- 2) Completá la siguiente tabla que relaciona los kilómetros recorridos por un automóvil y los litros de combustible que consume, sabiendo que el automóvil tiene siempre el mismo consumo por cada kilómetro que recorre.

Kilómetros que se recorren	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Litros de nafta que se utilizan	$\frac{1}{10}$				

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2

A partir de las relaciones de proporcionalidad conocidas por los alumnos, es posible completar los diferentes casilleros de esta tabla. Por un lado, queda identificado que la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{10}$ de litro por kilómetro. Esto significa que, para obtener el correspondiente de una cierta cantidad de kilómetros, "basta" multiplicar esa cantidad por la constante de proporcionalidad. Ahora bien, los alumnos no podrían en principio utilizar este procedimiento para hallar el correspondiente de $\frac{3}{2}$ porque no han aprendido aún a multiplicar fracciones (para hallar el correspondiente de $\frac{3}{2}$ tendrían que multiplicar $\frac{3}{2} \times \frac{1}{10}$). Sin embargo, están en condiciones de establecer el correspondiente de $\frac{3}{2}$: el correspondiente de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{20}$, por tanto, el correspondiente de $\frac{3}{2}$ es $\frac{3}{20}$. De estas consideraciones se deduce que $\frac{3}{2} \times \frac{1}{10}$ tiene que dar $\frac{3}{20}$. Será este un buen momento para proponer otros valores de modo que los alumnos enfrenten distintas multiplicaciones de fracciones. Podrían, por ejemplo, hallar la cantidad de nafta necesaria para recorrer $\frac{3}{5}$ km, $\frac{4}{3}$ km, etcétera.

Para que la resolución de este problema sea posible tiene que estar disponible en los alumnos el cálculo de la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc. de una fracción, trabajado en la actividad anterior.

Las relaciones establecidas se pueden sintetizar en una tabla como la siguiente:

Kilómetros que se recorren	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Litros de nafta que se utilizan	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Diagram illustrating the relationships between the values in the table:

- From 1 km to 2 km: $\times 2$
- From 2 km to 3 km: $\times 3$
- From 3 km to $\frac{1}{2}$ km: $: 2$
- From $\frac{1}{2}$ km to $\frac{3}{2}$ km: $\times 3$
- From $\frac{1}{10}$ L to $\frac{2}{10}$ L: $\times 2$
- From $\frac{2}{10}$ L to $\frac{3}{10}$ L: $\times 3$
- From $\frac{3}{10}$ L to $\frac{1}{20}$ L: $: 2$
- From $\frac{1}{20}$ L to $\frac{3}{20}$ L: $\times 3$

Los cálculos involucrados en este caso son:

$$1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

$$3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES EN EL CONTEXTO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROBLEMA

- 3) Para realizar una receta, por cada $\frac{1}{2}$ kg de fruta, hacen falta $\frac{1}{8}$ kg de azúcar. Completá la siguiente tabla para poder saber qué cantidad de cada ingrediente es necesaria, según el caso.

Cantidad de fruta (en kg)		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	
Cantidad de azúcar (en kg)	$\frac{1}{16}$			$\frac{1}{8}$					

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 3

Nuevamente, se pone en juego el recurso de completar la tabla apelando a diferentes procedimientos, para identificar luego las multiplicaciones por $\frac{1}{4}$ (constante de proporcionalidad) que surgen del análisis de la tabla. Es así como se puede calcular la cantidad de azúcar necesaria para 1 kg de fruta duplicando la que se precisa para $\frac{1}{2}$ kg de fruta: $\frac{2}{8}$ ó $\frac{1}{4}$ que es el doble de $\frac{1}{8}$. Para $\frac{1}{4}$ kg de fruta se puede recurrir a la mitad de la cantidad de fruta necesaria para $\frac{1}{2}$ kg; o sea, a la mitad de $\frac{1}{8}$ que es $\frac{1}{16}$. Para conocer la cantidad de azúcar que se precisa para $\frac{3}{4}$ kg de fruta, bastará multiplicar por 3 la cantidad necesaria para $\frac{1}{4}$ kg; esto es, $3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, etcétera.

Una vez completada la tabla se puede analizar con los alumnos las diferentes multiplicaciones que surgen:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$



PROBLEMA

- 4) Las siguientes instrucciones corresponden a un polvo para preparar pintura: "Para conseguir el color exacto, mezcle $\frac{1}{2}$ kilogramo de polvo por cada $\frac{3}{4}$ litro de agua".
- ¿Qué cantidad de agua es necesaria para 1 kg de polvo?
 - ¿Qué cantidad de agua será necesaria para $\frac{1}{4}$ kg de polvo?
 - ¿Qué cantidad de agua debe utilizarse para $\frac{3}{4}$ kg de polvo?

En todos los casos debe obtenerse siempre el mismo tono de color, como lo detallan las instrucciones.

Si te ayuda, podés construir una tabla de proporcionalidad como la siguiente, con valores que te sirvan para averiguar lo que te pide el problema:

Cantidad de polvo (en kg)	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Cantidad de agua	$\frac{3}{4}$			

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 4

Este problema presenta una complejidad mayor que los anteriores, porque la constante de proporcionalidad ($\frac{3}{2}$ litro de agua por cada kilogramo de polvo) no es, como en aquellos, una fracción de numerador 1. Los alumnos enfrentan entonces el desafío de multiplicaciones de fracciones más complejas. Para establecer el correspondiente de 1, podrán calcular el doble de $\frac{3}{4}$, que es $\frac{6}{4}$ ó $\frac{3}{2}$. Para establecer el correspondiente de $\frac{1}{4}$, deberán establecer cuánto es la cuarta parte de $\frac{3}{2}$. Un modo de pensarlo es considerar que la cuarta parte de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{8}$ y, por tanto, la cuarta parte de $\frac{3}{2}$ es $\frac{3}{8}$. El correspondiente de $\frac{3}{4}$ es tres veces $\frac{3}{8}$; o sea, $\frac{9}{8}$.

Una vez identificados los cálculos involucrados, se podrá empezar a reconocer que para hacer la tercera, la cuarta, la quinta parte de una fracción, se multiplica el denominador por 3, 4, 5 y, para hacer el triple, el cuádruplo, el quíntuplo de una fracción, se multiplica el numerador por 3, 4, 5, etc. Estas ideas empezarán a hacer observable una regla que el maestro deberá explicar apoyado en las actividades anteriores.

El producto de dos fracciones es otra fracción con numerador igual al producto de los numeradores de las fracciones dadas y con denominador igual al producto de sus denominadores.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$



PROBLEMA

- 5) En la siguiente tabla se muestra la relación entre cantidad de fruta que se usa para hacer mermelada y la cantidad de mermelada que efectivamente se obtiene. Completala.

Cantidad de fruta (kg)	5	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
Cantidad	3			

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 5

Es posible averiguar la cantidad de mermelada que se obtiene con 1 kilo de fruta haciendo la quinta parte de 3, esto es $\frac{3}{5}$. Para averiguar la cantidad correspondiente a $\frac{1}{2}$ kg de fruta, hay que establecer cuánto es la mitad de $\frac{3}{5}$. Esto se puede pensar así: la mitad de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{10}$, por tanto, la mitad de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{10}$. Probablemente la relación más difícil de establecer es la que corresponde a $\frac{2}{3}$ kg de fruta. Podría entonces usarse $\frac{1}{3}$ como paso intermedio, $\frac{1}{3}$ de la fruta se corresponde con la tercera parte de la cantidad que se obtiene con 1 kg de fruta, $\frac{3}{5} : 3 = \frac{3}{15}$, por tanto, si con $\frac{1}{3}$ kg de fruta se obtiene $\frac{3}{15}$, con $\frac{2}{3}$ se obtendrá $\frac{6}{15}$.

Queda planteada así la operación $\frac{2}{3} \times \frac{3}{15} = \frac{6}{15}$.

De la misma forma que en el caso anterior también puede buscarse la constante de proporcionalidad de la tabla que sería el número por el cual hay que multiplicar a 5 para llegar a 3; o sea, $\frac{3}{5}$.

SEGUNDA PARTE: NÚMEROS DECIMALES

1
ActividadRepasamos cuestiones básicas de los números decimales

Los números decimales no son un asunto nuevo para los alumnos. Sin embargo, es probable que, pasado un tiempo, se hayan olvidado de algunas relaciones con las que es interesante contar para continuar profundizando el estudio. Por esa razón proponemos una situación de repaso que permita explicitar un "piso común" a partir del cual retomar el trabajo. Será necesario recordar lo siguiente:

- la estructura posicional de la notación decimal: cada cifra representa una fracción decimal de la unidad multiplicada por el valor de esa cifra;

- las relaciones de valor entre posiciones contiguas (10 veces 0,1 es 1; 10 veces 0,01 es 0,1; etcétera);
- la multiplicación por 10, 100, 1.000, etc., sobre la base de las relaciones anteriores.



REPASAMOS CUESTIONES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS DECIMALES

PROBLEMAS

Seguramente el año pasado estudiaste números decimales. Puede ser que no recuerdes del todo algunos de los asuntos estudiados y, por eso, empezaremos ahora con un repaso.

- 1) Anotá, usando fracciones y considerando el peso (\$) como unidad, las siguientes cantidades de dinero, expresadas en decimales.

Notación decimal (en \$)	Notación fraccionaria (en \$)
0,50	
0,25	
0,10	
2,25	
0,05	
3,05	
2,80	
2,8	

- 2) ¿Cuánto dinero (en \$) hay en 10 monedas de 10 centavos? ¿Y en 10 monedas de 1 centavo? ¿Y en 100 monedas de 1 centavo? ¿Y en 100 monedas de 10 centavos?

De las cuestiones anteriores surgen algunos cálculos:

$$0,10 \times 10 = \quad 0,01 \times 100 =$$

$$0,01 \times 10 = \quad 0,1 \times 100 =$$

- 3) Apoyados en los cálculos anteriores, realicen ahora estos cálculos:

$$0,2 \times 10 = \quad 0,2 \times 100 =$$

$$1,2 \times 10 = \quad 1,2 \times 100 =$$

$$0,02 \times 10 = \quad 0,02 \times 100 =$$

$$1,02 \times 10 = \quad 1,02 \times 100 =$$

$$1,22 \times 10 = \quad 1,22 \times 100 =$$

- 4) Ya sabés que de una multiplicación siempre se pueden extraer dos divisiones. Por ejemplo, si se sabe que

$$1,2 \times 10 = 12, \text{ se sabe también que}$$

$$12 : 10 = 1,2; \text{ y que } 12 : 1,2 = 10.$$

Anotá todas las divisiones que surgen del problema 3.

- 5) Escribí reglas para multiplicar por 10 y por 100 un número decimal.

- 6) Es muy fácil recordar que, si se reparte \$ 1 entre 10 personas, cada una recibe 0,10 y que esto "lleva" al cálculo $1 : 10 = 0,1$. De la misma manera \$ 1 repartido entre 100 (aunque sea raro) da 0,01, lo cual nos permite recordar el cálculo $1 : 100 = 0,01$.

¿Cuánto es $0,1 : 10$? Explicalo usando las relaciones anteriores.

Para la resolución de la primera tabla, tal vez el docente necesite asegurarse de que los alumnos comprenden qué significa usar el peso como unidad, y para eso quizá sea conveniente clarificar que las mismas cantidades de dinero se podrían expresar en centavos, usando números enteros. La relación entre el peso y el centavo será la clave para que los alumnos resuelvan la tarea. Una vez realizada, será importante identificar que la segunda cifra de la notación decimal corresponde a los "décimos de peso" aunque en términos de sistema monetario no tenga nombre propio.

Se espera que, a partir de expresar las cantidades de dinero en fracciones, se pueda explicitar el valor de cada una de las cifras en la notación decimal. Por ejemplo:

$$0,25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}; \quad 2,25 = 2 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

Por otro lado, las dos últimas líneas de la tabla serán una oportunidad para señalar la equivalencia entre 2,8 y 2,80; y, en general, se podrá hablar del efecto de agregar ceros al final de la notación decimal, contrarrestándolo con el de agregar ceros intermedios.

Se comienza el trabajo con números decimales en el contexto del dinero. La idea es que dicho contexto sirva de punto de apoyo para explicitar las relaciones de valor entre posiciones contiguas, primero referidas a cantidades de dinero y luego descontextualizadas, tal como se propone en los problemas 2, 3, 4 y 5. Sobre la base de esas relaciones de valor, se justifican las reglas para multiplicar y dividir por 10 y por 100. Luego, esas mismas relaciones se pueden hacer extensivas a las multiplicaciones por otras potencias de 10.

Actividad 2

Valor posicional

En los problemas que se proponen a continuación se analizará el valor posicional de las cifras en las escrituras decimales, las equivalencias entre las posiciones contiguas y no contiguas de la escritura decimal y las operaciones subyacentes a las escrituras decimales.



VALOR POSICIONAL

PROBLEMAS DONDE "VALE" LA CALCULADORA

- 1) Si sólo se pudieran apretar las teclas "0"; "1"; "." ; "+" de la calculadora:
 - a) ¿Cómo podrían escribirse los siguientes números? Anotá en tu carpeta la cuenta que harías.
0,2; 0,03; 0,005; 0,25; 0,375; 341,406
 - b) Para anotar un número, Juan sumó 3 veces 0,001; 3 veces 0,1 y 4 veces 0,01. ¿Qué número anotó?
 - c) Intentá armar 1,02 de dos maneras diferentes. ¿Y 1,2?

d) ¿Qué número se arma sumando 10 veces 0,1; 10 veces 0,01 y 10 veces 0,001? Anticipalo antes de verificarlo en la calculadora.

2) Respondé:

a) ¿Qué número se arma haciendo

$$5 \times 0,1 + 3 \times 0,01?$$

b) ¿Qué números se forman haciendo los siguientes cálculos?

$$4 \times 0,1 + 3,001 + 5 \times 0,001$$

$$7 \times 0,1 + 6 \times 0,001$$

$$2 \times 0,01 + 5 \times 0,001$$

c) Propongan cálculos similares para que rápidamente un compañero pueda dar el número e intercámbienlos.

3) Resolvé los siguientes problemas:

a) Si en el visor de la calculadora escriben el número 3,452, ¿qué cálculo hay que hacer en la máquina para que aparezca el número 3,402 sin borrar? ¿Y para que aparezca 3,052?

b) Si en el visor de la calculadora está el número 2,347, ¿qué deben hacer para que aparezca el número 2,007 sin borrar?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, Y 3

En los problemas donde se utiliza calculadora será necesario que el docente explique que en el uso de los números decimales se emplea la coma para separar la parte entera de la decimal; sin embargo, en la calculadora se representa con un punto.

Nuevamente en la puesta en común será interesante analizar que 10 veces una unidad de un orden equivale a 1 vez la unidad del orden inmediato superior. También, a partir de estas actividades, podrán iniciarse ciertas equivalencias multiplicativas. Por ejemplo, para formar 0,2, es posible sumar dos veces 0,1 o hacer 20 veces 0,01, etcétera.

Para el problema 2 se espera que primero los alumnos realicen anticipaciones, que se expliciten en la puesta en común y se discutan, para luego verificarlas con la calculadora. Será necesario aclarar que en la calculadora deberán hacerlo con dos cálculos parciales (las multiplicaciones) que luego se sumarán.

En el problema 3 es necesario explicitar el valor de las cifras que deben ser modificadas en función de su valor posicional. Es decir, en el 2,347 el 3 corresponde a 0,3, que es necesario borrar, o sus equivalentes 0,30 ó 0,300, en cuyo caso es interesante advertir por qué al anotar estos últimos números se borran de la calculadora los últimos ceros.

Por ejemplo, se podría dejar registrado, lo siguiente:

cada lugar después de la coma vale sucesivamente

0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; etc. Así, por ejemplo, el número 12,158 equivale a:

$$1 \times 10 + 2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 8 \times \frac{1}{1.000}$$

o, lo que es lo mismo:

$$1 \times 10 + 2 \times 1 + 1 \times 0,1 + 5 \times 0,01 + 8 \times 0,001$$



VALOR POSICIONAL

PROBLEMAS DONDE "VALE" LA CALCULADORA

- 4) Pensando con la calculadora.
- a) Si anotás en la calculadora 29,8; sumás 0,1 y seguís apretando la tecla "=", se suman 0,1 cada vez que volvés a apretar "=".
- Anotá qué números irán apareciendo si apretás 5 veces la tecla "=".
- Después, verificalo con la calculadora.
- b) ¿Y si a 29,8 le sumás 0,01?
- c) Si a 124,77 le sumás 0,01 y seguís apretando "=", ¿qué números irán apareciendo?
- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para llegar a 125?
- d) Si queremos ir de 13,6 a 14 sumando de a 0,01, ¿cuántas veces habrá que apretar la tecla "="?
- ¿Y si lo hiciéramos sumando de a 0,001?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 4

A raíz de 4 a) se pueden promover las siguientes relaciones: ¿qué modificaciones se producen en un número al agregarle 0,1?; ¿cuál es la cifra que cambia?; ¿por qué?; ¿cuándo cambia más de una cifra en la escritura del número?; ¿por qué? En 4 b) este análisis se extenderá a los centésimos.

En 4 c) y 4 d), además, deberán anticipar, a partir de analizar la escritura del número, cuántos centésimos se necesitan para completar los décimos a fin de alcanzar el próximo entero.

En 4 d) se extienden estas relaciones a las equivalencias entre milésimos, centésimos y décimos. Aquí, en el análisis posterior a su resolución, deberá explicitarse que, si para un décimo se necesitan diez centésimos, como cada centésimo se forma con diez milésimos, para un décimo se necesitan cien milésimos. Este análisis podrá quedar anotado en las carpetas junto con escrituras que lo expresen, por ejemplo:

$$0,1 = 10 \times 0,01$$

$$0,01 = 10 \times 0,001$$

$$0,1 = 10 \times 10 \times 0,001 = 100 \times 0,001$$

Entonces, agregar 0,4 a un número es lo mismo que agregar 4 veces 0,1 ó 40 veces 0,01 ó 400 veces 0,001.

En el siguiente problema se reutilizan las relaciones trabajadas respecto de la descomposición de un número en décimos, centésimos y milésimos, pero esta vez a propósito de la resta.



VALOR POSICIONAL

PROBLEMAS DONDE "VALE" LA CALCULADORA

- 5) Siguiendo con la calculadora.
- a) Ahora anotamos en la calculadora el número 1,7. Queremos ir restando reiteradamente 0,1 hasta llegar a 0. ¿Cuántas veces hay que restarlo? Recordá que primero deberás resolverlo y recién luego podrás verificarlo con la calculadora.
- b) Si anotamos 2,45, ¿cuántas veces hay que restar 0,01 para llegar a 2? ¿Y para llegar a 0?
- c) Si anotamos 0,351, ¿cuántas veces habría que restar 0,001 para llegar a 0? ¿Y para llegar a 0,3?
- d) Si anotamos 4,206, ¿cuántas veces habría que restar 0,001 para llegar a 4? ¿Y para llegar a 4,2?

Unidades de longitud

Actividad 3

Los siguientes problemas permiten poner de manifiesto la estrecha relación entre números decimales y el sistema métrico decimal. Es importante que el docente tenga en cuenta que ambas nociones se alimentan mutuamente.

Para que los alumnos puedan abordar los siguientes problemas, será necesario que tengan presentes las unidades de longitud del sistema métrico decimal.

El análisis de la escritura y la lectura de las medidas de longitud debería llevar a discutir con los niños, por ejemplo, que la expresión 4,6 metros "esconde" el hecho de que el 6 a la derecha de la coma representa en este caso 6 décimos de metros y esto equivale a 6 centímetros; o que 4,25 km corresponde a 4 kilómetros más 0,25 km, que son 2 décimos de km (es decir, 2 hm) + 5 centésimos de km (es decir, 5 dam).



UNIDADES DE LONGITUD

PROBLEMA

- 1) Resolvé:
- a) Si partimos una tira de un metro en 10 partes iguales, ¿cuál es, en metros, la longitud de cada parte? ¿Y en centímetros?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1

En el análisis colectivo, se busca establecer que $\frac{1}{10}$ de metro es una longitud tal que 10 veces esa longitud es 1 metro.

$$\text{O sea, } 1 \text{ m} : 10 = \frac{1}{10} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$$

Es decir, se vuelven a retomar aquí los análisis de las escrituras decimales desarrollados en el contexto del dinero, ahora a propósito de las unidades de longitud.

$$\text{Esto es } 1 : 10 = \frac{1}{10} \text{ porque } 10 \text{ veces } \frac{1}{10} \text{ es } 1.$$

G.C.B.A.



UNIDADES DE LONGITUD

PROBLEMAS

- b) Esta tira mide $\frac{1}{100}$ de metro. Es decir que mide 0,01 metro.



¿Cuántas tiras necesitaríamos para armar una tira de 1 metro? ¿A cuántos centímetros equivale 0,01 metro?

- c) ¿Cómo se escribe en números decimales $\frac{5}{100}$ de metro?

- d) ¿Cuántos centímetros tiene una tira de $\frac{5}{100}$ de metro? Acordate que $\frac{5}{10}$ de metro se escribe también 0,5 metro.

- e) ¿A cuántos centímetros equivale una longitud de 0,05 metros? ¿Y una de 0,55 metros?

- f) ¿Cuántos centímetros tiene una tira de 5,5 metros?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1 (CONTINUACIÓN)

Las relaciones establecidas a partir del problema anterior podrán expresarse a través de las siguientes escrituras:

$$\frac{1}{100} \text{ m} = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{100} \text{ m} = 5 \times 0,01 \text{ m} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

Los siguientes problemas extienden estas relaciones a los milésimos y a diferentes conversiones entre metros y centímetros. Podrá observarse que la conversión de una unidad de medida a otra no se establece a partir de la presentación y el uso mecánico de un conjunto de reglas, sino del análisis de las equivalencias.



UNIDADES DE LONGITUD

PROBLEMAS

- 2) Ya estudiaste que $\frac{1}{1.000}$ de metro es una longitud tal que 1.000 veces esa longitud equivale a un metro. $\frac{1}{1.000}$ de metro se escribe también 0,001 metro. Un milésimo de metro es un milímetro.

- a) ¿Cuántos milímetros tiene 1 metro? ¿Y un centímetro? ¿Qué parte de un centímetro es un milímetro?

- b) ¿A cuántos centímetros equivale una longitud de 0,001 metros? ¿A cuántos milímetros equivale esa misma longitud?

- c) ¿A cuántos centímetros equivale una longitud de 0,111 metros? (Acordate de que 0,111 es lo mismo que $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000}$.)

- 3) Seguí resolviendo:

- a) ¿Qué parte de un metro son 40 centímetros?

- b) Completá usando números decimales:
40 cm = m

- c) ¿Qué parte de un metro son 123 cm?

- d) Completá usando números decimales:
123 cm = m

- e) Completá la siguiente tabla que relaciona longitudes expresadas en centímetros con esas mismas longitudes expresadas en metros.

Longitud en metros	2,3	2,03	2,003	2,33					
Longitud en centímetros					5	12	102	1	0,5

f) ¿Qué cuenta hay que hacer para expresar en centímetros una longitud que está expresada en metros? ¿Y para expresar en metros una longitud que está en centímetros?

g) Anotá todas las cuentas de multiplicar por 100 y de multiplicar por 0,01 que surgen de la tabla anterior.

4) Con lo trabajado hasta ahora, respondé:

a) ¿A cuántos centímetros equivalen 3 milímetros? ¿Y 30 milímetros? ¿Y 300 milímetros? ¿Y 0,3 milímetros? ¿Y 0,03 milímetros?

b) Completá las siguientes tablas que relacionan longitudes expresadas en diferentes unidades:

Longitud en centímetros	0,4	0,02	0,42							
Longitud en milímetros				30	5	35	3	1	0,5	3,5

Longitud en metros	1		10			0,1	0,01	10,11			
Longitud en milímetros		1		10	100				111	0,5	0,05

5) Una tira mide 4 metros 60 centímetros de largo. ¿Cuáles de las siguientes escrituras expresan esa cantidad?

- 4,060 m
- 460 cm
- 4,6 m
- 4 m 60 dm

6) Para pasar por cierto túnel, es necesario que los vehículos tengan como máximo una altura de 2,20 metros. ¿Cuáles de los siguientes vehículos podrán pasar?

- A: 207 cm
- B: 2 m 30 cm
- C: 2 m 1 dm
- D: 2 m 10 dm
- E: 2,10 m

7) Un automóvil recorre una distancia de 5 km 80 m y otro recorre 5,8 km. Decidí si ambos recorrieron lo mismo.

8) Respondé:

a) ¿Cuánto es la mitad de 1 metro? ¿Y la mitad de 0,5 metros? ¿Y la mitad de 0,05 metros? ¿Y la mitad de 0,4 metros? ¿Y la mitad de 0,3 metros?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 2, 3, 4, 5, 6, 7 Y 8

Se recordará aquí el análisis y las conclusiones previas al trabajar con números decimales.

Hay varias maneras de pensar la mitad de 0,5 metros:

- La mitad de 0,5 metros puede pensarse a partir de la mitad de 0,1 metros.

Como la mitad de 0,1 es 0,05, la mitad de 0,5 es $5 \times 0,05$; es decir, 0,25.

- 0,5 metros es lo mismo que 0,50 metros, la mitad es 0,25 metros.
- 0,5 es $\frac{1}{2}$ metro. La mitad de $\frac{1}{2}$ metro es $\frac{1}{4}$ m, es decir, 25 cm; o sea, $\frac{25}{100}$ metros ó 0,25 metros.
- $0,5 = 0,4 + 0,1$. La mitad de 0,4 es 0,2 y la mitad de 0,1 es 0,05; por tanto, la mitad de 0,5 es 0,25.

Las distintas estrategias ponen de relieve diferentes relaciones entre los números decimales al tiempo que informan a los alumnos acerca de modos de validar las conclusiones que van obteniendo. Un análisis similar podrá hacerse para establecer la mitad de 0,05 metros.



UNIDADES DE LONGITUD

PROBLEMAS

- 8) Para calcular:
- b) Basándote en lo resuelto en 8 a), calculá:
- $$0,5 : 2 = \quad 0,3 : 2 =$$
- $$0,05 : 2 = \quad 0,03 : 2 =$$
- $$0,4 : 2 =$$
- 9) Resolvé los problemas.
- a) Si se colocan, una al lado de otra, 10 tiras de 0,5 metros de longitud cada una, ¿qué largo forman en total? ¿Cuánto es $0,5 \times 10$?
- b) Si se colocan, una al lado de la otra, 10 tiras de 0,8 metros de longitud cada una, ¿qué largo forman en total? ¿Cuánto es $0,8 \times 10$?
- c) Si se colocan, una al lado de la otra, 10 tiras de 0,04 metros de longitud cada una, ¿qué largo forman en total? ¿Cuánto es $0,04 \times 10$?
- d) Si se colocan, una al lado de la otra, 10 tiras de 0,84 metros de longitud cada una, ¿qué largo forman en total? ¿Cuánto es $0,84 \times 10$?
- 10) Más problemas para resolver:
- a) Si se parte en 10 trozos iguales una tira de 0,5 metros de longitud, ¿cuánto mide cada trozo? ¿Cuánto es $0,5 : 10$?
- b) Si se parte en 10 trozos iguales una tira de 0,04 metros de longitud, ¿cuánto mide cada trozo? ¿Cuánto es $0,04 : 10$?
- c) Si se parte en 10 trozos iguales una tira de 0,54 metros de longitud, ¿cuánto mide cada trozo? ¿Cuánto es $0,54 : 10$?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 8, 9 Y 10

Estos últimos problemas constituyen una oportunidad para volver sobre la multiplicación y la división de números decimales por 10 y para revisar las razones que justifican las reglas, ya identificadas, de "correr la coma".

4

Comparación y orden de números decimales

Actividad

En esta oportunidad, se elaborarán criterios para comparar números decimales.



COMPARACIÓN Y ORDEN DE NÚMEROS DECIMALES

PROBLEMAS

- 1) En un supermercado venden bolsas con diferentes frutas.
La bolsa A dice: "peso 3,3 kilogramos".
La bolsa B dice: "peso 3,25 kilogramos".
Si quiero llevar la bolsa que contiene más fruta, ¿cuál elijo?
- 2) Martina pesaba 55,5 kilogramos. Hoy se subió a la balanza y extrajo un *ticket* que decía 55,500 kilogramos. Preocupadísima afirmaba que subió de peso. ¿Es cierto esto?
- 3) El chocolate "Qué rico" cuesta \$ 2,05 y el chocolate "Choco Choc", \$ 2,50. Los dos pesan lo mismo. ¿Cuál es el chocolate más económico?

4) Completá los espacios con el signo menor (<), mayor (>) o igual (=) según corresponda:

a) 1,5 1,50

b) 0,299 0,3

c) $\frac{2}{10}$ 0,04

d) $\frac{10}{1.000}$ 0,1

e) $\frac{3}{100}$ 0,03

f) $\frac{40}{10}$ 0,40

5) Ordenar de menor a mayor:

7,4; 8,3; 7,12; 8,08; 7,04; 8,15; 8,009; 8,013

6) Resolvé los problemas:

a) Matías y Elena jugaban a adivinar números. Mientras lo hicieron con números naturales no hubo problemas, pero cuando jugaron con números decimales se generó la siguiente discusión.

MATÍAS: "Adivina, adivinador... El número que yo pensé está entre 2,4 y 2,5".

ELENA: "Siempre el mismo tramposo, no existen números entre 2,4 y 2,5".

¿Quién pensás que tenía razón?

b) Matías le dio a Elena varios ejemplos de números mayores que 2,4 y menores que 2,5.

¿Podés vos pensar algunos?

c) Elena, entusiasmada, ve que ahora sí le puede ganar a Matías.

ELENA: "Adivina, adivinador... Mi número está entre 1,15 y 1,16, y tiene tres cifras decimales".

¿Qué números habrá pensado Elena? Proponé tres.

d) En la última jugada Matías propone:

"Pensé un número que está entre 5,62 y 5,63, y tiene dos lugares después de la coma".

Elena sostiene que ganó esa mano ya que esta vez Matías sí se había equivocado.

¿Tiene razón Elena? ¿Por qué?

7) Escribí tres números entre

a) 1,5 y 1,6

b) 2,03 y 2,04

c) 5,17 y 5,2

d) 11,9 y 12

e) 0,2 y 0,21

8) Escribí tres números decimales menores que 0,01.

9) Escribí una fracción entre los siguientes números:

a) 0,5 y 0,7

b) 1,1 y 1,2

c) 12,05 y 12,06

10) Escribí un número decimal entre los siguientes números:

$\frac{3}{4}$ y 1

$\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{10}$

$\frac{1}{10}$ y $\frac{12}{100}$

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Y 10

G.C.B.A. El trabajo con comparación de números decimales comenzó en 5° grado, por tanto, es probable que muchos niños ya hayan incorporado como recurso para compararlos el considerar primero el número que tenga mayor la parte entera, luego el que tenga mayor la cifra que está en el lugar de los décimos, y por último la cifra que está en el lugar de los centésimos, etc. Sin embargo, es posible que aún haya quienes, a la hora de comparar, conciben los números decimales como pares de números naturales separados por una coma: así consideran que 1,5 es menor que 1,50 porque 5 es menor que 50. Es esa una oportunidad para repensar criterios que permitan rechazar elaboraciones como las anteriores y enriquecer así las relaciones que subyacen en la escritura decimal.

Nuevamente se realizarán análisis del tipo:

$$1,50 \text{ es equivalente a } 1 \frac{50}{100}$$

$$1,5 \text{ es equivalente a } 1 \frac{5}{10}$$

$$\frac{50}{100} \text{ es equivalente a } \frac{5}{10}$$

Por tanto, ambas expresiones son equivalentes.

El problema 6 apunta a dos cuestiones: por un lado, a mostrar la densidad de los números racionales ya que efectivamente hay infinitos números entre 2,4 y 2,5, por ejemplo, 2,48; 2,456; 2,4733... Pero, por otro lado, también es relevante mostrar la limitación al acotar la cantidad de cifras decimales.

En el caso de buscar números de 3 cifras decimales entre 1,15 y 1,16, el maestro podrá analizar en forma colectiva las respuestas preguntando cómo se puede estar seguro de que no hay más que las que se mencionaron.

Otro aspecto interesante para tener en cuenta en el caso de los ejercicios en los que se propone intercalar números decimales es que, aprovechando la descontextualización, el maestro aliente las propuestas de escribir números con varias cifras después de la coma puesto que esta posibilidad no es válida cuando nos manejamos con contextos como el del dinero o algunas unidades de medida.

5

Actividad

Operaciones con números decimales. Suma y resta

La suma y resta de números decimales fue trabajada en 5° grado. Esta actividad pretende avanzar en esos contenidos.



OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES. SUMA Y RESTA PROBLEMAS

- 1) Lorena y Alejandra querían unir sus cintas por el borde. Lorena decía que uniendo su cinta de 1,5 metros a la de Alejandra de 1,6 metros tendrían una cinta de 2,11 metros. Alejandra pensaba que si unían ambas cintas tendrían una cinta de más de 3 metros. ¿Quién estaba en lo cierto? ¿Cómo pensó el cálculo cada una?
- 2) En la caja del supermercado te dicen que tenés que pagar \$ 5,75. Si lo hacés con un billete de \$10, ¿cómo hacés para calcular mentalmente lo que te deben dar de vuelto?
- 3) Si en el visor de la calculadora tenés el número 0,234, qué operación deberías hacer para que aparezca...
0,134 0,235
0,244 0,24
1,234
- 4) Resolvé mentalmente:
 $10 + 0,2 =$ $1 - 0,5 =$
 $2 - 0,05 =$ $3 + 0,7 =$
 $1 - 0,25 =$ $4 - 1,15 =$
 $4 + 0,02 =$ $1 - 0,75 =$
 $4 - 2,30 =$ $10 + 0,2 + 0,03 =$
 $2 - 1,1 =$ $8,9 + 1,1 =$
 $0,5 + 0,05 + 0,005 =$ $10 - 0,91 =$
 $1,14 + 1,16 =$
- 5) Sumá 0,9 a cada uno de los siguientes números:
3,1; 3,11; 4,25; 0,73; 2,99.
Restá 0,9 a cada uno de los siguientes números:
8,6; 3,4; 12,5; 8,25.

Sumá 0,09 a cada uno de los siguientes números: 2,23; 1,75; 9,91; 3,55.

Restá 0,09 a cada uno de los siguientes números: 8,29; 12,71; 4,35; 8,28.

- 6) Algunas personas cuando tienen que sumar 0,9 a un número decimal le suman 1 y luego le quitan 0,1. Por ejemplo, para hacer $3,4 + 0,9$, lo piensan así: $3,4 + 1 = 4,4$.

Luego hacen $4,4 - 0,1 = 4,3$. Entonces, $3,4 + 0,9 = 4,3$. Esta regla funciona. Teniendo en cuenta los cálculos que realizaron en el ejercicio anterior, ¿qué reglas escribirán para restar 0,9? ¿Y para restar 0,09? ¿Y para sumar 0,09?

- 7) Calculá mentalmente:

$$35,15 + 0,19 =$$

$$2,134 + 0,199 =$$

$$8,34 - 1,9 =$$

$$15,60 + 1,99 =$$

$$9,53 - 2,9 =$$

$$7,931 + 2,99 =$$

- 8) Matías y Diego jugaban a "Quien no pasa la línea".

Matías partía del 0 y siempre debía sumar un número. Diego partía del 1 y siempre debía restar un número. Matías no podía llegar a un número mayor que el de Diego; de lo contrario, perdía. Diego no podía llegar a un número menor que el de Matías, pues, de lo contrario, perdía él.

Estas son las primeras jugadas:

Matías	Diego
0	1
+ 0,1 =	- 0,1 =
+ 0,1 =	- 0,1 =
+ 0,02 =	- 0,1 =
+ 0,005 =	- 0,05 =
+ 0,0005 =	- 0,09 =

¿A qué número llegó cada uno de los participantes?

¿Puede Matías agregar 3 números más sin perder? ¿Y Diego?

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Y 8

En el problema 1, una forma de justificar el resultado correcto sería expresando en fracciones los números en cuestión:

$$1,6 = 1 + \frac{6}{10}$$

$$1,5 = 1 + \frac{5}{10}$$

$$\text{como } \frac{6}{10} + \frac{5}{10} = \frac{11}{10} \text{ y } \frac{10}{10} = 1,$$

$\frac{11}{10}$ es equivalente a $1 + \frac{1}{10}$. El resultado de la suma es entonces

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{10} = 3 + \frac{1}{10}$$

que es en lo que pensó Alejandra al afirmar que la suma era mayor que 3.

El trabajo con la calculadora vuelve a poner en juego el valor posicional en las escrituras decimales. La calculadora funciona como herramienta de control de anticipaciones, que el docente debe indicar que se hagan por escrito.

Los problemas 5, 6 y 7 se relacionan entre sí. Mientras que el problema 5 propone explorar una estrategia para sumar 9 décimos, centésimos o milésimos, el problema 6 "invita" a explicitar la regla que se ha utilizado y que no necesariamente fue enunciada y analizada para resolver el ejercicio precedente. El problema 7 permite extender el procedimiento utilizado (sumar el entero inmediatamente superior a los 9 décimos, centésimos o milésimos y restar 0,1; 0,01 ó 0,001, según el caso) a otros números que no están compuestos sólo por 0 y 9, como 1,9; 2,99, etcétera.

Esta regla también podría extenderse a otros números, por ejemplo 0,8 (sumar un entero y restar 0,2). Se sugiere reflexionar con los alumnos, de ser posible, si utilizarían la misma estrategia para sumar números como 2,1; 3,2; 11,01; es decir, números que están a uno o dos décimos de un entero pero que se encuentran "más cerca" del entero anterior que del siguiente.

Posiblemente aquí convenga discutir que en estos casos se puede sumar primero la parte entera y, al resultado obtenido, sumarle la parte decimal. Por ejemplo: $7,34 + 3,1$, se puede pensar como $7,34 + 3 = 10,34$. Entonces, $10,34 + 0,1 = 10,44$. Es decir, $7,34 + 3,1 = 10,44$.

6 Actividad Cociente decimal de dos números naturales. Expresión decimal de fracciones no decimales

Los alumnos abordarán estas primeras situaciones en las que tienen que "sacar decimales" en una división de números enteros, apoyados en sus conocimientos sobre medidas. La idea es alentar diferentes resoluciones para, a partir de ellas, enseñar el procedimiento de "bajar los ceros cuando la cuenta entera se acaba".



COCIENTE DECIMAL DE DOS NÚMEROS NATURALES. EXPRESIÓN DECIMAL DE FRACCIONES NO DECIMALES

PROBLEMAS

- | | |
|---|--|
| <p>1) Un quiosquero compró una caja con 15 latas de gaseosas a \$12. ¿Cuánto pagó por cada una?</p> <p>2) En una ruta que tiene 18 kilómetros quieren ubicar 25 carteles publicitarios a igual distancia. ¿Cada cuántos kilómetros deben colocarse?</p> | <p>3) ¿Es posible que pague una cuenta de \$ 99 en 12 cuotas de igual valor?</p> <p>En caso de que sea posible, ¿cuál sería ese valor?</p> |
|---|--|

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

Para comenzar a realizar la división involucrada en el problema 1, los alumnos podrán basarse en la transformación de los pesos en centavos pero orientándolos a que el resultado lo consideren en pesos, de modo de recuperar así la expresión decimal.

$$\begin{aligned} \$ 12 & : 15 \\ \$ 12 & = 1.200 \text{ c} \\ 1.200 \text{ c} : 15 & = 80 \text{ c ó } \$ 0,80. \end{aligned}$$

Ahora bien: ¿cómo reconstruir la cuenta para que el resultado sea 0,80?

El cambio de unidades proporciona "pistas" para entrar al algoritmo convencional. El docente podrá explicar que al pasar los pesos a centavos se multiplica por 100 el dividendo y luego, para recuperar el resultado en pesos, se divide por 100.

De manera similar, para averiguar la distancia entre los carteles, podrían expresar los kilómetros en metros, $18 \text{ kilómetros} = 18.000 \text{ metros}$.

$$18.000 : 25 = 720 \text{ metros}$$

$$720 \text{ metros} = 0,72 \text{ km}$$

Ahora bien, las unidades de longitud ofrecen la posibilidad de establecer un paralelo entre las transformaciones de unidades y las transformaciones de los restos en el algoritmo convencional, a fin de determinar el cociente decimal entre dos números naturales. Veamos:

$$\begin{array}{r}
 18 \text{ kilómetros} \quad | \quad 25 \\
 \hline
 0 \text{ kilómetros} \quad 7 \text{ hectómetros} \quad 2 \text{ decámetros} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 180 \text{ hectómetros} \\
 175 \text{ hectómetros} \\
 \hline
 5 \text{ hectómetros} \\
 \downarrow \\
 50 \text{ decámetros} \\
 0 \text{ decámetros}
 \end{array}$$

La transformación de kilómetros en hectómetros y de hectómetros en decámetros puede ponerse en paralelo con la transformación de enteros en décimos y de décimos en centésimos.

$$\begin{array}{r}
 18 \text{ unidades} \quad | \quad 25 \\
 \hline
 0 \text{ unidades} \quad 7 \text{ décimos de unidad} \quad 2 \text{ centésimos de unidad} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 180 \text{ décimos de unidad} \\
 175 \text{ décimos de unidad} \\
 \hline
 5 \text{ décimos de unidad} \\
 \downarrow \\
 50 \text{ centésimos de unidad} \\
 0 \text{ centésimos de unidad}
 \end{array}$$

El problema 3, si bien vuelve al contexto del dinero, marca una diferencia con el primer problema ya que, al ser 99 mayor que 12, probablemente se comience la división convencional y sea necesario pasar los pesos que sobran a centavos para seguir repartiendo.

$$\begin{array}{r}
 \$ 99 \quad | \quad 12 \\
 3 \quad \$ 8 \\
 \downarrow \\
 \$ 3 = 30 \text{ décimos de peso} \quad | \quad 12 \\
 6 \text{ décimos de peso} \quad 2 \text{ décimos de peso} \\
 \downarrow \\
 60 \text{ centésimos de peso} \quad | \quad 12 \\
 5 \text{ centésimos de peso}
 \end{array}$$

Por tanto, $\$ 99 : 12 = \$ 8 + \$ \frac{2}{10} + \$ \frac{5}{100}$; o sea, $\$ 8,25$.

Al finalizar esta actividad se espera que se hayan establecido relaciones que permitan arribar a las siguientes conclusiones:

- Para hallar los primeros cocientes decimales entre números naturales puedo, según el contexto, usar unidades menores que me permitan "repartir" y luego volver a expresar el resultado del reparto en la unidad original.
- Cuando en una división de naturales "sobra" un resto, lo puedo transformar en décimos y seguir dividiendo los décimos; si sobran décimos, los puedo transformar en centésimos y dividir los centésimos.

Actividad 7 ¿Dividir por 10, 100, 1.000 o multiplicar por 0,1; 0,01; 0,001?

A partir de esta actividad se espera establecer la equivalencia que existe entre dividir por 10, 100, 1.000 y multiplicar por 0,1; 0,01; 0,001.



¿DIVIDIR POR 10, 100, 1.000 O MULTIPLICAR POR 0,1; 0,01; 0,001?

PROBLEMAS

1) Revisá las actividades en las que trabajamos con longitudes para recordar cómo se multiplica un número decimal por 10, 100, 1.000.

2) Intercambiá con tu compañero algunas multiplicaciones de decimales por 10, 100, 1.000 (vos proponés multiplicaciones y él te las propone a vos). Analicen juntos los resultados de las multiplicaciones que propusieron y anoten una regla para multiplicar decimales por 10, 100, 1.000.

3) Hagan lo mismo con divisiones por 10, 100, 1.000.

4) Ya vimos que

$$1 : 10 = 0,1$$

y también sabemos que $1 \times 0,1 = 0,1$

De manera análoga: $2 : 10 = 0,2$

y también sabemos que $2 \times 0,1 = 0,2$

$$3 : 10 = 0,3$$

$$3 \times 0,1 = 0,3$$

$$52 : 10 = (50 + 2) : 10 = 50 : 10 + 2 : 10 =$$

$$5 + 0,2 = 5,2$$

$$52 \times 0,1 = 50 \times 0,1 + 2 \times 0,1 = 5 + 0,2 = 5,2$$

Pareciera que dividir por 10 es lo mismo que multiplicar por 0,1. Explorá si esto es siempre cierto y, si te convencés, encontrá un modo de explicarle a un compañero por qué funciona esta regla.

5) De manera análoga a lo que analizamos en el punto anterior, estudiaremos ahora la relación entre dividir por 100 y multiplicar por 0,01. Para eso comenzá haciendo algunas multiplicaciones por 0,01 y dividiendo esos mismos números por 100. Te ayudamos con algunas propuestas:

$$1 : 100 = 0,01$$

$$1 \times 0,01 = 0,01$$

$$5 : 100 = 0,05$$

$$5 \times 0,01 = 0,05$$

$$34 : 100 = 0,34$$

$$34 \times 0,01 = 0,34$$

Seguí probando con números de tres, cuatro y

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1, 2, 3, 4 Y 5

La estructura posicional de la notación decimal es el recurso que sirve para explicar tanto las divisiones como las multiplicaciones por las potencias de 10.

Efectivamente, los alumnos ya deberían saber a esta altura que al dividir un cierto número por 10, las unidades se transforman en décimos, las decenas en unidades, las centenas en decenas, los décimos en centésimos, los centésimos en milésimos, etc. Dividir un número natural por 10, por ejemplo 23, se puede pensar como 23 veces 1: 10, lo cual da 23 veces 0,1, o sea, $23 \times 0,1$.

Por otra parte, se puede recuperar el resultado de multiplicar un número natural por 0,1 apelando a la suma iterada: cada 10 veces que se suma 0,1 se obtiene 1. Así, $50 \times 0,1$ es sumar 5 veces $10 \times 0,1$, lo cual da como resultado 5.

Del mismo modo se puede establecer la equivalencia entre dividir por 100 y multiplicar por 0,1.

Es importante que los alumnos lleguen a una formulación de estas leyes y no solamente que den la regla sin su fundamento. El sentido de la actividad es alimentar una justificación para multiplicar números decimales.

La proporcionalidad directa, la multiplicación y los números decimales

Actividad 8

Se trabajará la resolución de situaciones de multiplicación de números decimales en el contexto de la proporcionalidad directa. También, las estrategias que permitan avanzar en la comprensión de los algoritmos convencionales para multiplicar números decimales y, a su vez, aquellas estrategias que establezcan control sobre estos.

Al igual que el trabajo realizado con fracciones, la proporcionalidad directa será el contexto en el cual los alumnos podrán apoyarse para conocer el resultado de multiplicaciones y divisiones con números decimales, aun antes de conocer los procedimientos requeridos para obtenerlo.



LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA, LA MULTIPLICACIÓN Y LOS NÚMEROS DECIMALES

PROBLEMAS

- 1) La siguiente tabla muestra el dinero que se recauda en una boletería en relación con la cantidad de personas que asisten a un paseo:

Cantidad de personas	5	10	1	2	12	
Dinero recaudado (\$)	7,75					12,40

- 2) La siguiente tabla vincula el precio que debe pagarse por distintas cantidades de queso si se conoce el precio de 1 kilogramo.

Peso del queso (kilogramos)	1	0,5	0,25		
Precio (\$)	10,60				13,25

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 1 Y 2

Consideremos la tabla que relaciona la cantidad de dinero recaudado en función de la cantidad de asistentes. Para averiguar la cantidad de dinero recaudado para 10 personas, se puede hacer el doble de 7,75, que es 15,5. De ahí, puede obtenerse el valor de la entrada correspondiente a 1 persona, esto es 1,55.

Para hallar la cantidad de personas con quienes se recauda \$ 12,40 puede haber diversas formas. Una de ellas sería pensar en ir sumando 1,55 tantas veces como sea necesario hasta llegar a \$ 12,40, o sea, 8 veces. Otro modo es considerar que por 2 personas se recaudan \$ 3,10 y que 4 veces \$ 3,10 es \$ 12,40.

Completada la tabla, se "tienen" los siguientes cálculos aunque estos no hayan sido realizados vía una estrategia específica:

$$5 \times 1,55 = 7,75$$

$$10 \times 1,55 = 15,5$$

$$2 \times 1,55 = 3,10$$

$$12 \times 1,55 = 18,6$$

Ahora bien, cualquiera de estos cálculos puede pensarse si se pasan los pesos a centavos: se obtendría el total recaudado en centavos. Luego, para "tenerlo" en pesos, habría que dividir los centavos por 100. Esto puede ayudar a que los alumnos entiendan —por lo menos en este contexto— por qué las multiplicaciones anteriores se pueden pensar como multiplicaciones de números naturales, en las que después "se corre la coma dos lugares". Esta estrategia sirve para multiplicar un número natural por un decimal y será reutilizada, aunque no exactamente de la misma manera, en el problema siguiente.

En el caso de la segunda tabla es posible averiguar el precio de 0,5 kg, puesto que es la mitad de \$ 10,60, precio correspondiente a 1 kg, o sea, \$ 5,30. El precio de $\frac{1}{4}$ kg puede averiguarse si se calcula la mitad del precio correspondiente a $\frac{1}{2}$ kg o la cuarta parte de lo que le corresponde a 1 kg, esto es, \$ 2,65. Si fuera necesario el docente actualizará las relaciones:

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

Probablemente para averiguar el valor de 1,25 kg sumen el valor correspondiente a 1 kg más el valor correspondiente a 0,25 kg, o sea, \$13,25.

Por otra parte, la constante de proporcionalidad de esta tabla es 10,60, que es el precio correspondiente a 1 kg de queso. Quedan entonces planteados en el pizarrón los siguientes cálculos con sus respectivas respuestas, cuyos resultados se han asegurado aun desconociendo el algoritmo convencional para multiplicar decimales: con estos números la tabla "cierra".

$$0,5 \times 10,60 = 5,30$$

$$0,25 \times 10,60 = 2,65$$

$$1,25 \times 10,60 = 13,25$$

A partir de aquí el maestro deberá explicar cómo tratar de reconstruir estos cálculos. Una posibilidad será proponer un cambio de unidades: 0,5 kg es

lo mismo que 500 gramos. Si 1 kg cuesta \$ 10,60, 100 gramos cuestan \$1,06; por tanto, 500 gramos cuestan $5 \times 1,06 = 5,3$.

Veamos en detalle las transformaciones en juego:

$0,5 \times 10,60 = 5 \times 1,06$. O sea, se multiplicó un factor por 10 y el otro se dividió por 10 para "conservar" el resultado.

¿Funcionarán transformaciones parecidas a éstas para los otros cálculos?

Veamos:

0,250 kg es lo mismo que 250 gramos; esto es, 100 gramos + 100 gramos + 50 gramos, lo cual indica que hay que multiplicar por 2,5 el precio de 100 gramos, que es \$1,06. Aunque no se adelanta mucho porque se vuelve a obtener un cálculo con dos números decimales, sí se puede ver que $0,250 \times 10,60 = 2,5 \times 1,06$. O sea nuevamente se muestra que el producto no altera si se multiplica un factor por 10 y se divide el otro por 10. Si ahora se repite la operación, aunque en el contexto no resulte fácil ver su sentido, queda:

$$0,25 \times 10,60 = 2,5 \times 1,06 = 25 \times 0,106 = 2,65$$

Lo que se recorta de este trabajo es la posibilidad de transformar los cálculos en otros equivalentes, de modo tal que uno de los factores sea un número natural.

De alguna manera, la coma de uno de los factores "se carga" al otro factor.

Ensayemos las transformaciones con la tercera cuenta en cuestión:

$$1,25 \times 10,60 = 125 \times 0,1060 = 13,25$$

Veamos otra manera de pensar las transformaciones. Retomemos el cálculo:

$0,5 \times 10,60 \longrightarrow$ se puede pensar 0,5 como $5 \times 0,1$; y 10,6 como $106 \times 0,1$ (esto ha sido analizado en la actividad anterior). Resulta entonces que

$$0,5 \times 10,6 = 5 \times 0,1 \times 106 \times 0,1 \text{ ó } 5 \times 106 \times 0,1 \times 0,1 = 5 \times 106 \times 0,01$$

Esta expresión "muestra" más claramente por qué se multiplican los números "como si fueran naturales" y luego se "corre la coma".



LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA, LA MULTIPLICACIÓN Y LOS NÚMEROS DECIMALES

PROBLEMA

- 3) Indicá si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. Explicá cómo lo pensaste.
- a) Cuando se multiplica un número decimal por un número natural, el producto siempre es mayor que el número natural.
 - b) Cuando se multiplica un número decimal por un número natural, el producto siempre es mayor o igual que el número decimal.
 - c) El producto de dos números decimales siempre tiene tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de ambos números.
 - d) El producto de dos números decimales nunca puede ser un número natural.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA 3

Los alumnos podrán retomar los cálculos de la actividad anterior como una fuente de exploraciones frente a estas preguntas "más teóricas":

$$1,55 \times 5 = 7,75$$

$$1,55 \times 2 = 3,10$$

$$1,55 \times 12 = 18,60$$

$$0,5 \times 10,60 = 5,30$$

$$0,25 \times 10,60 = 2,65$$

$$1,25 \times 10,60 = 13,25$$

Esta discusión puede reeditar aquella anterior (planteada ya en 5° grado) acerca de productos que son menores que uno de los factores. Se sugiere profundizar esto solicitando a los alumnos que especifiquen en qué casos:

- un producto de dos factores es mayor que cada uno de los factores;
- un producto de dos factores es menor que uno de los factores y mayor que el otro;
- un producto de dos factores es menor que los dos factores.

Será también ésta una oportunidad para discutir el lugar de la coma (cantidad de cifras decimales) del producto de dos números decimales.

La tradición escolar enseña tempranamente que el producto de dos números decimales tiene tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de ambos factores. Entendemos que no es conveniente dar esta idea sin que los alumnos hayan tenido previamente la posibilidad de encontrar estrategias personales y elementos para fundamentar los procedimientos convencionales.

Las publicaciones *Matemática. Fracciones y números decimales. 6º grado. Páginas para el alumno*
y *Apuntes para la enseñanza* han sido elaboradas por

el Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Las opiniones de directivos, maestros, padres y alumnos son muy importantes
para mejorar la calidad de estos materiales. Sus comentarios pueden ser enviados a

G.C.B.A. Ministerio de Educación

Paseo Colón 255. 9º piso.

CPAc1063aco. Buenos Aires

Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

G.C.B.A.

PLAN PLURIANUAL



PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA

PLAN PLURIANUAL



PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA