12
marzo 2022

URANIA

Revista de divulgación cultural sobre la formación docente en matemática.
Publicación electrónica de periodicidad cuatrimestral.

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Departamento de Matemática

URANIA

ISSN 2683-9849

Urania. Revista de divulgación cultural sobre la formación docente en matemática
es una publicación electrónica de periodicidad cuatrimestral. Número XII- 2022 Marzo

Podés contactarnos enviando un email a revista.urania@gmail.com

Seguinos en **revista.urania**
RevistaUrania

y me parece que la pandemia nos obliga a revisar, a repensar este nuevo rol. Yo estoy apasionado con el rol de curador de internet. Estas cosas que aparecen colgadas en internet y que uno dice, y esto ¿cómo se mueve? ¿Esto se da cuando lo descubro yo o cuando lo descubren los alumnos y te dicen: *profe, esto que descubrí, ¿de qué se trata?* y te obliga a sentarte y decir: la verdad que para qué les voy a dar una tabla de valores si con el Photomath le saco la foto y tengo la tabla de valores puesta ahí. Interesante, ¿para qué existe una tabla de valores? Es un replanteo, no te enseño más la técnica de hacer la tabla de valores, sacá la foto y te voy a enseñar a leer eso. Es otra visión, otro desafío que a mí me apasiona.

¿Cuáles son las experiencias que considerás que deben transitarse en la formación docente, lo que hemos llamado los "irrenunciables" que deben proponerse desde la formación de profesores?

Me parece imprescindible mostrarles una clase real y concreta, no una descripción o una transcripción de un fragmento que a nosotros nos puede servir para que analicemos lo que los alumnos dijeron; una profesora o un profesor en el aula tomando las decisiones que corresponden, tomando el aula como una realidad. Me parece imprescindible pausar el video de una clase que compartimos dentro del aula de formación, y preguntarle a este nuevo profesor, a esta nueva profesora: *y vos ¿qué harías? Vos ¿cómo seguirías esto? Si vos fueras esa profesora o profesor, ¿cómo sigue tu clase? ¿Qué haces en función de esto? ¿Y por qué lo haces? ¿Y en función de qué?* Y a partir de esa argumentación, hacer dialogar el contenido matemático y el para qué se enseña eso, la pata didáctica y pedagógica. Y una vez que se discutió, se analizó y se trabajó, volver al video y ver cómo lo resolvió la profesora. Y ahora: *¿qué te parece esa resolución?*

Poner a este nuevo profesor o nueva profesora en el lugar de quien está dando la clase y asumir la responsabilidad de ver de qué manera seguir me parece que es una técnica de trabajo de la cual no nos podemos despegar. La idea es poner permanentemente en situación de que te estás formando como profesional de la enseñanza, no te estás formando como un matemático, ni como un técnico, ni como un ingeniero; te estás formando como un profe que va a enseñar matemática y esta cualidad profesional tiene sus características. La toma de decisiones se hace con gente que está dentro del aula y en segundos. Uno se lleva todo pensado, todo armado y cuando uno entra al aula se marca un tiempo que es diferente del que habías pergeñado. Esto, de alguna manera, en el aula de formación se tiene que anticipar para que no se produzcan estas cuestiones que a veces uno ve cuando observa una clase de una persona que está haciendo una práctica, que resuelve la situación como si la hubiese resuelto su propia profesora.

Queríamos cerrar con una pregunta sobre un asunto que nos atraviesa particularmente: el tema de la formación docente de la Ciudad de Buenos Aires, que es objeto de conflicto desde hace unos años entre los institutos y el gobierno de CABA. ¿Qué reflexión te merece esta situación?

Siempre es auspicioso crear una universidad, un órgano de creación de conocimientos. Lo que no es auspicioso es que uno desconozca la tradición de años de experiencia de formación docente que tienen los institutos. Puedo aceptar que haya que revisar la oferta de los institutos de formación docente de la ciudad, ya que algunos están muy cerca unos de otros y con opciones comunes. Se los puede especializar en la formación en matemática, en física, en química, en biología; otros especializados en ciencias, hay tantas ideas que se pueden analizar… Ahora, esas ideas se pueden llevar a la práctica solamente escuchando la experiencia que tienen los institutos de formación docente. Si ellos no hablan, lo que estamos logrando es que el instituto diga: *no existo*. Nosotros somos producto de esos institutos. Yo soy egresado del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico, que ahora depende de la Universidad Tecnológica Nacional. ¿Por qué no egresé del Joaquín? Porque el técnico me quedaba más cerca de mi casa. Luego fui profesor durante muchos años ahí y en el Acosta.

¿Por qué no escuchar la voz de los profesorados? Yo creo que la creación de la UniCABA era una excelente oportunidad de devolverle a los institutos la palabra respecto de la formación docente. Me parece que la UniCABA puede ofrecer otra cosa, porque si la oferta va a estar centrada en la formación docente, en eso, la palabra la tienen los institutos; podés estar o no de acuerdo con la formación que se brinda, pero para eso están los ámbitos de discusión.

Los institutos deberían hacer investigación como en la universidad y que el profesor no solamente vaya a dar las horas correspondientes a su materia específica, sino que pueda especializarse en el campo de esa asignatura. Pero para eso hay que cambiar la estructura, eso no se cambia porque aparezca una universidad.

Por eso repito que la UniCABA es una excelentísima idea, en tanto y en cuanto recupere la voz de los institutos. La autoridad en formación docente de la ciudad de Buenos Aires son los 29 institutos, no hay otra autoridad al respecto.

Durante muchos años trabajé con Hugo Tricárico, que es un viejo conocido del Joaquín. Hay una frase que guardo de él: hablaba de *profesores de trinchera* para referirse al profesor de la tiza, el que está dentro del aula. Ese profesor dialoga con sus pares del profesorado, no dialoga con el ministerio. Ese diálogo es el que hay que recuperar en la UniCABA. Los profesorados ya están armados: no sé qué valor puede llegar a tener estudiar durante cuatro años un profesorado en tecnología para la escuela primaria; la tecnología tiene sentido cuando la podés asociar a las prácticas del lenguaje, a las ciencias sociales, a la matemática. Es mucho más rico formar un profesor de matemática para la escuela primaria, un maestro especialista que pueda discutir con sus compañeros acerca de cuándo incluyo software para hacer geometría, por ejemplo; y cuándo juego con los pibes con el compás y cuándo con el cordón de la zapatilla para simular que es un compás. No a todas las edades la tecnología les viene bien, no todos los contenidos se pueden desarrollar a través de ella. Para eso tenés que formar a un especialista, un especialista en el contenido del nivel. En esto la letra la tienen, vuelvo a decirlo, los profesorados. ¿Qué demandas tenés como profesorado hoy? ¿Qué demandas tenés como profesorado para nivel primario, para inicial o para nivel secundario? ¿Qué te piden los alumnos? Sobre eso trabajemos, más que sobre una nueva macroestructura donde los profesorados tienen que pelear si existen o no existen. Los profesorados están y hay que escucharlos.

Las fotografías fueron facilitadas por el entrevistado.
La última corresponde a la videoconferencia

Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética

Grupo Lunes[1]

¿Quiénes somos?

Conformamos un grupo que reúne a profesorxs de matemática de escuela secundaria y docentes e investigadorxs universitarixs con el propósito de pensar en conjunto la enseñanza de la Matemática. Los orígenes de nuestro grupo se remontan al año 2008 y desde el 2012, a partir del vínculo institucional de algunxs de sus integrantes, el trabajo del Grupo Lunes (GL) se encuadra en proyectos de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).

Nuestro grupo se reúne periódicamente para estudiar problemas de enseñanza –que nos interpelan como colectivo– ubicados en diferentes contenidos del currículum. Como parte del estudio elaboramos propuestas para la escuela secundaria que se implementan en las aulas de algunos de lxs profesorxs del grupo, con la presencia de otrxs integrantes que registran de diferentes maneras lo que acontece en las clases[2]. En los encuentros grupales posteriores analizamos los registros obtenidos, enriquecidos con la mirada de quienes estuvieron presentes, identificando episodios que nos permiten profundizar en la comprensión de diferentes asuntos didácticos anclados en cada contenido abordado. En función de este análisis, eventualmente la propuesta se ajusta o reformula para que vuelva a ser estudiada en el aula, en un proceso iterativo.

La planificación de la enseñanza a desplegar en cada tema se construye colectivamente en una trama entre las tareas que se van esbozando, las anticipaciones de las posibles resoluciones de lxs estudiantes y la gestión docente que vamos delineando. Las decisiones que se toman en este proceso de producción colectiva se nutren de las diferentes experiencias y contextos que aporta el conjunto de docentes. Para quien implementa la propuesta en su aula, esta planificación se constituye en un marco de referencia que se ajusta en relación con su grupo de estudiantes y sus modalidades personales. No la concebimos como un "guion" que limite la acción del docente en sus clases.

En las discusiones que mantenemos irrumpen por momentos cuestiones y preocupaciones de la práctica docente de algunx integrante del grupo que, asumidas como asuntos colectivos, se enriquecen

[1] En la actualidad: Cecilia Pineda, Valeria Ricci, Romina Flores, Laura Acosta, Germán Pugliese, Juan Pablo Luna, Enrique Di Rico, Carmen Sessa, Gema Fioriti, María Teresa Coronel, Marina Andrés, Valeria Borsani, Verónica Cambriglia, Inés Zuccarelli, Germán Zeoli, Mariana Matovich, Fabiana Hortas, Carolina Alonso. Marina Torresi. También participan Paula Trillini y Matías Maidana de la Universidad de General Sarmiento.
[2] Notas personales, audios, fotos, videos, etc.

y se transforman a partir de esos intercambios. Ese ir y venir entre lo individual y lo colectivo es lo que caracteriza nuestra producción y nos identifica como grupo.

Otra cuestión que tiene mucho valor para nosotrxs es la interacción con colegas interesadxs en pensar la enseñanza, por fuera de nuestro grupo. Teniendo en cuenta esto escribimos documentos con las propuestas que elaboramos[3] con la finalidad de compartir y discutir las cuestiones didácticas que vamos estudiando. Consideramos importante que un colectivo más amplio de docentes pueda dialogar con nuestras propuestas y que, de esta forma, nuestra producción se torne dinámica al ser analizada e intervenida por nuevas voces.

En el momento de escribir este texto, el grupo está abocado al estudio de un posible recorrido para abordar el trabajo algebraico en los primeros años del nivel medio.

Acuerdos del grupo en torno al álgebra escolar

El inicio de la escuela secundaria supone para lxs estudiantes cambios de diferente orden. En relación con la matemática, implica, entre otras cosas, apropiarse del lenguaje algebraico y aprender a trabajar con los nuevos objetos que ese lenguaje permite representar, como las expresiones algebraicas y las ecuaciones.

Lxs integrantes del GL compartimos la decisión didáctica de comenzar el estudio del álgebra en la escuela secundaria a partir de la construcción de la idea de variable, inmersa en un trabajo con expresiones algebraicas. Dejamos para un segundo momento el trabajo con las ecuaciones para que puedan ser abordadas a partir de la idea de variable; entendemos más fértil este abordaje que la opción usual de comenzar con las ecuaciones considerando las letras como incógnitas. Estas decisiones coinciden con las prescripciones curriculares vigentes desde hace tiempo, a nivel nacional y en diferentes jurisdicciones.

Nuestro interés actual es delinear –y estudiar– un posible tránsito hacia el *mundo del álgebra*[4]. Es nuestra intención recuperar conocimientos y prácticas aritméticas que lxs estudiantes desplegaron en la escuela primaria: la relación aritmética–álgebra se presenta como potente para ser explorada en la búsqueda de un sentido para los objetos algebraicos.

Como trabajo previo al diseño de nuestra propuesta, discutimos más transversalmente sobre el aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria. “Symbol Sense”, de Abraham Arcavi (1994), fue un texto inspirador leído hace tiempo por lxs integrantes del grupo. En ese artículo, Arcavi enuncia diferentes “conductas” que considera importante adquirir para lograr tener un sentido de los símbolos. En particular, retenemos para nuestro trabajo la idea potente de que es posible leer información de

[3] Participamos también en jornadas, congresos y encuentros nacionales.
[4] En la sección 3 abordaremos las líneas principales de nuestra propuesta.

una expresión algebraica, antes de manipularla y también que se puede manipular para leer nueva información.

En nuestro grupo discutimos sobre dónde hacer foco desde la enseñanza: qué esperamos que logren nuestrxs alumnxs y a qué apuntamos como docentes más allá de los primeros aprendizajes. De estas discusiones surgieron acuerdos que refieren al trabajo sobre –y con– las expresiones algebraicas y las ecuaciones. A continuación, presentamos brevemente los acuerdos a los que llegamos, que sintetizan nuestros propósitos para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria. No pretenden ser exhaustivos sino reflejar los grandes núcleos que nos interesan:

- Que lxs estudiantes aprendan a producir expresiones algebraicas como modelo de una situación intra o extra matemática que se quiere estudiar. A su vez, que reconozcan cuándo dejarlas de lado si no resulta necesario o útil para la tarea que tienen que resolver.
- Que el tratamiento algebraico de las expresiones vaya apareciendo al servicio –o como necesidad– para resolver un problema o responder una pregunta. Esto trae aparejado, para nosotrxs, que lxs estudiantes:
    - reconozcan expresiones equivalentes y adquieran el dominio de la operatoria algebraica necesaria para transformar una expresión en otra equivalente.
    - sepan leer información de una expresión algebraica y eventualmente la transformen en otra equivalente para leer nueva información.
    - incorporen la evaluación de expresiones algebraicas como recurso válido en la resolución de una tarea; entiendan qué implica evaluar, cuáles son sus alcances y límites, etc.
- Que se propongan tareas en la clase que requieran que lxs estudiantes cambien de registro de representación (Duval, 1995), considerando como punto de partida o de llegada el registro algebraico. En el trabajo con las diferentes representaciones de un mismo objeto (tablas, gráficos, expresiones algebraicas, etc.), se busca que lxs estudiantes aprendan a coordinar las distintas informaciones que cada una porta.
- Que en el aula se aborden las ecuaciones como una condición que se impone sobre las expresiones algebraicas y su resolución como la búsqueda de los valores de la variable que la verifican. Se busca que lxs estudiantes comprendan que las transformaciones que se realizan en el proceso de resolución de una ecuación permiten conservar su conjunto solución, es decir, generan ecuaciones equivalentes.

Es claro para nosotrxs que la enseñanza tiene que hacerse cargo del avance de lxs estudiantes en los distintos propósitos identificados, que algunas zonas del currículo pueden resultar más fértiles que otras para promover algunos, y que el tipo de tarea que propongamos será condicionante de ese avance. Tomando como marco estos acuerdos, en el presente el grupo está explorando una vía de entrada al álgebra que se ubica en el contexto de la divisibilidad[5]. En la secuencia que estamos diseñando, comenzamos proponiendo un trabajo aritmético con "color" algebraico y lo continuamos incorporando expresiones algebraicas.

Acerca de nuestra propuesta de entrada al álgebra en el contexto de la divisibilidad

En esta sección presentaremos, a partir del análisis de algunos ejemplos, la entrada al álgebra vía la aritmética que estamos elaborando para un aula de primer año de la escuela secundaria.

La propuesta tiene una *primera parte* en la cual se proponen a lxs estudiantes diversas actividades que involucran expresiones numéricas de cálculos que combinan varias operaciones y *una segunda parte* en la que se trabaja con expresiones algebraicas. La cuestión que articula toda nuestra propuesta es decidir si un número, dado a través de una expresión numérica o de la evaluación de una expresión algebraica, es múltiplo de otro.

Primera parte: estudio de expresiones de cálculos que combinan operaciones

Antes de presentar algunas actividades de la primera parte de nuestra secuencia, queremos detenernos en un tipo de problema que está relacionado con actividades que aparecen en libros escolares y documentos curriculares de la escuela primaria (Ejemplo 1). A continuación de esto, presentamos algunos recortes de los primeros problemas de nuestra propuesta (Ejemplos 2 y 3). Estos problemas tienen por finalidad el estudio de expresiones numéricas y, aunque presentan cálculos, el objetivo no es la resolución de las operaciones.

En los análisis de estos tres ejemplos identificamos asuntos que consideramos importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico, como son la lectura de información a partir de una expresión numérica, la transformación de una expresión en otra equivalente para responder a una cierta pregunta y la producción de expresiones numéricas. Queremos resaltar que estos ejemplos no conforman una secuencia didáctica, sino que los tomamos como representantes de distintos tipos de problemas que trabajan los asuntos que nos interesa estudiar.

[5] La mayoría de lxs integrantes del Grupo proponen en sus aulas actividades de "fórmulas para contar colecciones" y despliegan un trabajo con expresiones equivalentes a partir de la generalización de un proceso, como primer encuentro de lxs estudiantes con las expresiones algebraicas. Entendemos la propuesta que estamos explorando en el presente, complementaria de esta vía de entrada.

- Ejemplo 1

Sin hacer el cálculo, decidan si el número 48 x 15 es:	
a) múltiplo de 15	*d) múltiplo de 30*
b) múltiplo de 6	*e) múltiplo de 20*
c) múltiplo de 9	*f) múltiplo de 50*

En este problema lxs estudiantes tendrían que elegir, para cada ítem, cómo transformar la expresión 48 x 15 en otra equivalente con el objetivo de leer en la nueva escritura lo necesario para responder sin obtener el resultado del cálculo propuesto. Por ejemplo, en el ítem e), se pone en juego un ida y vuelta entre los factores de la expresión 48 x 15 y las posibles descomposiciones del 20. La decisión de descomponer al 48 como 12 x 4 y al 15 como 5 x 3 está comandada por la posibilidad de descomponer al 20 como 5 x 4 dando lugar a la posibilidad de transformar la expresión 48 x 15 en 20 x 12 x 3.

Notemos que no se apunta a trabajar con la descomposición en números primos sino a que, para responder cada pregunta, se elija qué transformación hacer. Hay un objetivo, una finalidad que orienta la elección de la transformación a realizar en cada caso.

La noción de múltiplo presente en este problema, asociada a la idea de que un número es múltiplo de *a* si lo puedo descomponer como "algo x *a*", estará en juego en las actividades de nuestra propuesta y va a orientar el tipo de lectura y transformación de las expresiones –numéricas y algebraicas– a desplegar en el aula[6].

Señalemos que, al comenzar el trabajo con esta actividad, lxs chicxs suelen realizar los cálculos propuestos para responder cada ítem. A partir de que aparezca esta estrategia –y no antes– será necesario "negociar" con ellxs la condición "sin hacer los cálculos propuestos" para ir promoviendo otro tipo de trabajo. La discusión en el espacio colectivo puede ayudar a aquellxs estudiantes que realicen la cuenta completa a incorporar los argumentos de sus compañerxs que apelaron a la lectura de una parte de la expresión.

Entre nosotrxs hay acuerdo en que las acciones de *leer y transformar* son propias del trabajo algebraico que hay que desplegar en la escuela secundaria. Desde esta posición, proponemos una entrada al trabajo algebraico que recupere las ideas y prácticas que lxs chicxs hayan aprendido al interactuar con actividades como la de este ejemplo en la escuela primaria, o que los inicie en este tipo de trabajo, si no tienen experiencias previas con él.

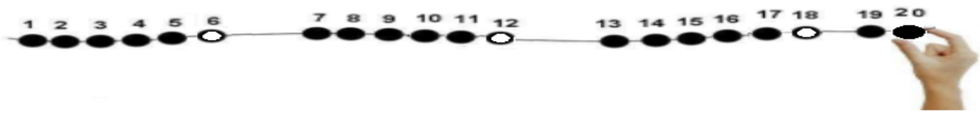
[6] Al proponer que los cálculos no sean realizados, pierde valor la noción de múltiplo asociada a obtener resto cero en la división.

En la primera parte de nuestra propuesta tenemos el propósito de introducir a lxs estudiantes en la práctica de lectura de información de expresiones numéricas que combinan varias operaciones. En algunos casos, para leer cierta información, será necesario transformar la escritura dada, conservando la equivalencia de las expresiones.

Decidimos comenzar con un problema en contexto con la intención de generar un soporte para que lxs estudiantes puedan identificar la relación de ser o no múltiplo de un determinado número y hablar de ella refiriéndose al contexto.

- Ejemplo 2

Se arma un collar colocando 5 bolitas negras a continuación 1 blanca repitiendo la secuencia como muestra la imagen. Los números que se encuentran arriba del collar indican el orden en el que fueron enhebradas las bolitas.



a) Se arma un collar con 30 bolitas siguiendo esta secuencia, ¿de qué color será la última bolita? Si a este collar se le agregan 6 bolitas siguiendo la misma secuencia, ¿de qué color será la última? ¿Y si hubiera agregado 12? ¿Y si hubiera agregado 15?

b) ¿Y si el collar tiene 600 bolitas? ¿y 676?

c) Emilia armó tres collares, en todos los casos usó más de 241 y menos de 300 bolitas y terminan en bolita blanca. ¿Cuántas bolitas pudo haber usado en cada collar?

En el ítem a) queremos que lxs chicxs aborden la resolución considerando relaciones del tipo "si sumo 6 –o un múltiplo de 6– desde una bolita blanca llego a otra blanca". Esto permitiría identificar la potencia de estudiar el diseño del collar en términos de múltiplos de 6. De esta manera, la noción de múltiplo y las relaciones matemáticas vinculadas a esta idea se movilizan y se expresan apoyadas en el contexto.

En el ítem b), lxs estudiantes deberían reconocer que en el 600 hay una cantidad entera de grupos de 6 bolitas. Ahora ya no se podrán apoyar en el dibujo, pero el número es fácilmente reconocible como múltiplo de 6.

Es probable que, para este problema, lxs estudiantes expresen su resolución y los cálculos involucrados en forma oral, o en una escritura con palabras, o en una escritura que incluya las cuentas utilizadas, o en una combinación de todas las anteriores. Pensamos en una intervención docente que avance hacia la explicitación escrita de los cálculos. Por ejemplo, para el estudio del 676, algunxs estudiantes pueden explorar encontrando el resultado de distintas multiplicaciones por 6 hasta acercarse “lo más posible” al 676. Lx docente puede proponer una escritura similar a la que se muestra a continuación (Figura 1) con el objeto de acercar al grupo una forma de comunicar la estrategia.

6 x 112 = 672 ← Me falta 4
6 x 113 = 678 ← Me pasé
676 = 112 x 6 + 4
ES NEGRA PORQUE QUEDA ENTRE DOS BLANCAS

Figura 1: Escritura que podría acompañar una resolución de lxs estudiantes

Otra posibilidad es apoyarse en lo pensado para el 600 y luego analizar si en las otras 76 bolitas hay o no grupos enteros de 6. En este caso, anticipamos que algunxs estudiantes podrían separar el 76 en 60, 12 y 4 viendo que, al agregar 60, el collar termina en una bolita blanca, luego al agregar 12 más, también la última será blanca y finalmente con las últimas 4 bolitas el collar terminará en una negra. En este caso, lx docente podría reunir estas operaciones en una sola escritura (Figura 2).

$$676 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{600}_{\text{termina en blanca}} + 60}_{\text{termina en blanca}} + 12}_{\text{termina en blanca}} + 4}_{\text{termina en negra}}$$

Figura 2: Escritura que podría acompañar otra resolución de lxs estudiantes

Queremos destacar que, si bien las estrategias que anticipamos buscan llegar al 676, queda del lado de lx docente la posibilidad de incorporar desde las escrituras y el discurso el hecho de concebir esas operaciones como descomposiciones del número y no como cuentas a resolver para conocer su resultado. Sean cuales sean las escrituras que aparezcan, ponerlas en relación será una tarea que proponga lx docente en el espacio colectivo. Por ejemplo, ante las dos escrituras que presentamos en las Figuras 1 y 2, la pregunta *¿dónde se puede ver el 112 del primer procedimiento en el segundo?* genera condiciones para cargar de mayor sentido a las expresiones –en términos del contexto– y concebir a 112x6+4, 600+60+12+4 y 676 como expresiones numéricas equivalentes[7].

En nuestra propuesta, continuamos con una actividad que retoma ciertas relaciones elaboradas en el primer problema. Se trata ahora, sin referencia explícita a un contexto, de abordar diferentes escrituras horizontales de cálculos sobre los cuales hay que decidir si el número que representan es

[7] En Borsani, Luna y Sessa (2021) se analizan algunos episodios cuando lxs estudiantes resolvían este problema en el aula del profesor Germán Pugliese, integrante del GL.

o no múltiplo de 6. Compartimos dos de los ítems incluidos en esa actividad, que involucran tareas de lectura y transformación.

- Ejemplo 3

Decidan, sin resolver las cuentas, si el resultado de cada uno de los cálculos es múltiplo de 6. Expliquen sus respuestas. *a) 120 + 600 y 125 + 600* *b) 6x52 + 8 y 6x52 + 158*

Notemos que en el Ejemplo 2 la escritura de las expresiones analizadas habrá aparecido –probablemente ofrecida por lx docente en el espacio de trabajo colectivo– después de que lxs chicxs respondieran a las preguntas y elaboraran relaciones sobre el contexto. En el ejemplo 3 la escritura está presente en el enunciado y la pregunta de si estos números son o no múltiplos de 6 promueve la lectura y eventualmente la transformación de esas escrituras.

En cada uno de los ítems se presentan dos expresiones en las que se repiten algunos términos. Apoyados en esta característica, la intención es promover una lectura de cada expresión identificando qué de la información obtenida de la primera puede ser reutilizable en la segunda. Esto podría llevar a pensar en una transformación sobre la segunda expresión que haga visible a la primera como parte de ella. Por ejemplo, 125+600 se podría transformar en 5+120+600 y 6x52+158 se podría reescribir como 6x52+8+150. De este modo, sólo resta analizar si el 5 y el 150 son múltiplos de 6.

En las expresiones analizadas en este problema es posible que en el aula se comience a identificar que los números involucrados tienen diferentes estatus en relación con la tarea. Por ejemplo, en 6x52+158, para decidir si el primer término es múltiplo de 6, alcanza con observar que es "6 x algo" reconociendo que el 52 no juega un rol protagónico en este caso. A su vez, el segundo término requiere un tratamiento diferente que podría implicar una descomposición que involucre múltiplos de 6 o apoyarse en la expresión 6x52+8, como mencionamos anteriormente.

Segunda parte: el trabajo con expresiones algebraicas

En nuestra propuesta, para abordar el estudio de expresiones algebraicas comenzamos con una actividad que presenta expresiones numéricas a completar (Ejemplo 4). Tanto este tipo de expresiones, como las algebraicas que aparecen a lo largo de la secuencia, tienen una estructura similar a la de los cálculos propuestos en las actividades anteriores. El contexto de la divisibilidad seguirá presente en las tareas y se continuará con un análisis del status de los signos alfanuméricos involucrados en las expresiones. Esta continuidad opera como punto de apoyo para el abordaje de nuevas tareas.

- Ejemplo 4

a) Completen, si es posible, con un número sobre la línea punteada, para que el resultado de la cuenta sea múltiplo de 7.
705 +___ 7x 23 +___ 21 x 13 +___
b) Completen, si es posible, con un número sobre la línea punteada, para que el resultado de la cuenta sea múltiplo de 8.
16 + 2 x___ 4 x 7 x 2 +___ 8 x___+ 25 24 x___+ 16

En los dos ítems de este problema, para decidir cómo completar la expresión, se necesita estudiar la información que se ofrece en uno o dos términos en tanto múltiplo de 7 o de 8, según el caso. Por ejemplo, la forma de leer los primeros términos de las cuentas del ítem a) para analizar si se trata de un múltiplo de 7 o no requiere de distintas habilidades. En la segunda expresión hay que identificar (como antes en el 6x52) el 7 como factor y que el 23 no aporta información relevante, mientras que en la tercera expresión, la identificación del 21 como múltiplo de 7 daría lugar a la descomposición del 21x13 como 7x3x13.

Los espacios a completar puestos en diferentes partes de la cuenta apuntan a seguir focalizando el rol que juega cada número en la expresión. Por ejemplo, en 7x 23 + … se espera discutir en el aula que, como el primer término es múltiplo de 7, el otro término necesariamente tiene que ser múltiplo de 7 para garantizar que la expresión completa cumpla la condición buscada. En cambio, para lograr que 24 x … + 16 sea múltiplo de 8, al ser el 16 y un factor del primer término múltiplos de 8, el número que se elija para completar no incide para lograr la divisibilidad por 8 de toda la expresión –análogamente a lo que pasaba con el 23 en el ejemplo anterior– y entonces se puede completar con cualquier número.

Lx docente puede generar y sostener discusiones que se apoyen en las diversas respuestas de cada estudiante (quienes podrían completar con uno o varios números). Esto permite poner de relieve la diversidad de posibilidades e ir construyendo la idea de variable, como así también ir aproximando hacia nociones que involucran la inclusión de cuantificadores (“algunos números sirven y otros no”, “ningún número sirve” o “todos los números sirven”). Estas ideas se van a reutilizar e ir reforzando en actividades que involucren expresiones algebraicas.

Al completar con un número en la línea punteada y explicar por qué la expresión que se obtiene cumple lo pedido unx estudiante podría estar teniendo en cuenta ciertas condiciones generales que el número con el cual completó debe cumplir –aun cuando no lo pueda expresar–. Si bien queremos que la generalidad se juegue en el aula, no estamos esperando que en esta actividad se caracterice de manera exhaustiva cuál es el conjunto de números que cumple cada condición. En el ejemplo a continuación compartimos un problema en el que aparece una letra formando parte de la expresión que tienen que considerar y lo concebimos como un posible primer problema para abordar esta cuestión.

- Ejemplo 5

a) ¿Es cierto que si en 16 x 15 + c se reemplaza la letra c por el número 44, el resultado es múltiplo de 4? ¿Y si se la reemplaza por el 154?
b) ¿Con qué otros números podrían reemplazar la letra c para que el resultado de 16 x 15 + c sea múltiplo de 4? ¿Con qué otros números podrían reemplazar para que no sea múltiplo de cuatro?

Elegimos que la primera acción de lxs estudiantes con expresiones algebraicas sea la evaluación. Al hacerlo, obtendrán escrituras de cálculos y preguntas similares a aquellas con las que venían trabajando. En el ítem a) los valores a reemplazar están dados; en ese sentido, la letra no expresa ninguna generalidad. Sin embargo, se irá cargando del sentido de variable a medida que avance la actividad.

En el ítem b) lxs estudiantes tienen que elegir los valores para reemplazar en la letra *c*. Esperamos que puedan leer que en la expresión hay un múltiplo de cuatro en el primer término y que se apoyen en las propiedades de suma de múltiplos y de suma de múltiplo más no múltiplo, para dar posibles valores de *c*. Otra opción es que lxs estudiantes incorporen cierta generalidad en las respuestas que elaboren y, por ejemplo, para cumplir lo pedido en la primera pregunta del ítem b) decir que es posible reemplazar la letra *c* por cualquier múltiplo de 4.

A partir de algunos problemas como el del Ejemplo 5 planeamos discutir y construir colectivamente con lxs alumnxs qué papel jugó la letra en esos problemas. Esperamos llegar a formular una idea de variable como la siguiente:

“Si en una expresión con números y operaciones hay una letra, esta se puede reemplazar por distintos números. A esa letra se la denomina variable, porque no tiene un valor fijo, puede variar”.

El Ejemplo 6 que presentamos a continuación sigue aportando a la apropiación, por parte de lxs estudiantes, de la práctica de lectura de información de una expresión y su eventual transformación para leer información nueva.