Capítulo 1

PROPORCIONALIDAD DIRECTA Y NÚMEROS NATURALES

Introducción

Desde los primeros años de la escolaridad, los alumnos se ven enfrentados a resolver diversos problemas multiplicativos, incluso cuando aún no están en condiciones de reconocer a la multiplicación o a la división como operaciones que permiten resolverlos. En sus primeros acercamientos a este tipo de problemas los niños apelan al conteo, dibujos, marcas, sumas y restas tal como lo hacen cuando tratan con problemas aditivos.

Si bien no todos los problemas multiplicativos se vinculan con la proporcionalidad directa, buena parte de los que habitan las aulas de Primer ciclo se asocian a ella. Estos suelen presentarse bajo la forma de un enunciado, en ocasiones, acompañado de ilustraciones que brindan información o habilitan procedimientos ligados, por ejemplo, al conteo. Más adelante, se introduce el trabajo en torno a los resultados de multiplicaciones en formato de tablas –como recurso privilegiado para organizar la información disponible y averiguar valores de una u otra de las magnitudes–.

Además de explicitar el vínculo de estos problemas con los cálculos multiplicativos, en 2.° grado se inicia la sistematización de conjuntos de productos organizados en tablas. Este trabajo se profundiza en 3.° y 4.° grado a partir de la exploración e identificación de regularidades entre los productos incluidos en la tabla pitagórica[1]. Las reflexiones que se proponen en este sentido apuntan a que, de manera progresiva, se evidencien las relaciones entre factores y productos que se apoyan en las propiedades de la multiplicación, la división y la proporcionalidad. Desde 4.° grado, estas relaciones se explicitan aún más y la proporcionalidad se convierte en objeto de estudio en sí mismo a partir de analizar sus propiedades y sus límites.

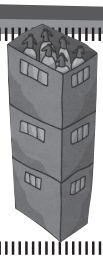
1. En la tabla pitagórica se incluyen los productos que resultan de multiplicar entre sí los números del 0 al 10. Tanto los factores como los productos se organizan en una cuadrícula: en la primera fila y en la primera columna se ubican los factores (0 al 10) y en el resto de los casilleros, los productos.

Este capítulo se ocupa precisamente del abordaje de este contenido en el pasaje del Primero al Segundo ciclo. Nos apoyaremos en ejemplos de actividades, producciones de alumnos y discusiones producidas en algunas aulas. En primer lugar, haremos referencia a los problemas de proporcionalidad simple y luego, a los problemas de proporcionalidad doble o múltiple[2].

Problemas de proporcionalidad directa sin exigencia de cálculos

PROBLEMA 1

¿Cuántos sifones hay en estos 3 cajones iguales?



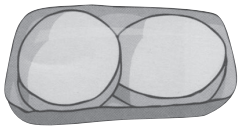
La ilustración que acompaña el texto del problema anterior habilita a la resolución por medio del conteo, procedimiento utilizado por un alumno de 2.° grado, como puede verse en la imagen siguiente:

Nótese que el alumno escribe que lo pensó con el dibujo, dando cuenta de la ayuda que aportó la imagen para averiguar que, considerando los 3 cajones, hay 18 sifones.

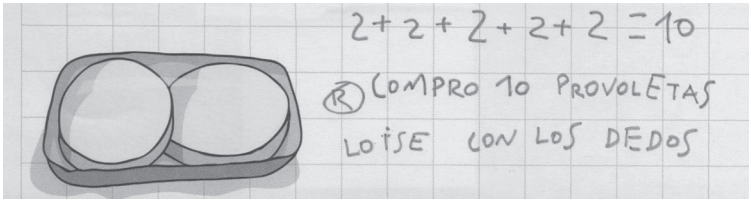
2. Varias propuestas curriculares de numerosas jurisdicciones de nuestro país se apoyan en la distinción entre problemas aditivos y multiplicativos aportada por Gerard Vergnaud (1990). En relación con los problemas multiplicativos, tema central de este libro, el autor distingue los problemas de proporcionalidad simple de los de proporcionalidad doble o múltiple.

PROBLEMA 2

Alfredo compró 5 paquetes de provoletas como estos. ¿Cuántas provoletas compró en total?



Al igual que en el primer problema, los niños cuentan con una ilustración que acompaña el enunciado.



Si bien la imagen anterior muestra que el niño representa la situación a través de sumas sucesivas (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10), también escribe "lo hice con los dedos". Este detalle no es menor, en tanto permite interpretar que el registro del cálculo resulta un medio para comunicar o guardar memoria de un procedimiento que posibilita resolver el problema, aunque no haya sido utilizado durante la resolución.

Los problemas 1 y 2 se encuadran dentro de los problemas de proporcionalidad simple directa, sin embargo, suelen ser reconocidos como problemas de multiplicar. Ambos tienen una particularidad: los enunciados presentan un solo número. En este sentido las ilustraciones complementan la información ofrecida en el texto permitiendo reponer la cantidad de sifones que contiene cada cajón y la cantidad de provoletas de cada paquete, es decir, el valor de la unidad. Seguramente, si modificamos el enunciado y explicitamos esa información en el texto resulte más claro –para los adultos que hemos interactuado con los clásicos problemas de regla de tres simple– reconocer que se trata de problemas de proporcionalidad.

- En 1 cajón hay 6 sifones. ¿Cuántos sifones hay en 3 cajones iguales?
- En 1 paquete hay 2 provoletas. ¿Cuántas provoletas hay en 5 paquetes iguales?

A partir de la información en cada enunciado, resulta claro que contamos con tres datos numéricos que permiten averiguar el cuarto valor desconocido. Esto es así dado que se trata de una relación entre cuatro cantidades: dos cantidades refieren a magnitudes de un cierto tipo, y las otras dos de otro tipo (en el problema 1 se vincula cantidad de cajones y cantidad de sifones y en el problema 2, cantidad de paquetes y cantidad de provoletas). La claridad es aún mayor –desde la mirada del que ha interactuado con este tipo de problemas– si modificamos el tipo de representación optando por presentar la información en tablas de valores.

Cantidad de cajones	Cantidad de sifones
1	6
3	X

Cantidad de paquetes	Cantidad de provoletas
1	2
5	X

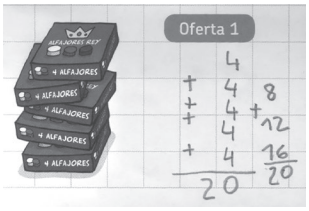
Un fenómeno que es preciso considerar es la tendencia generalizada a reducir el sentido de un concepto con sus representaciones. En este caso, las tablas de valores conducen a evocar rápidamente la idea de proporcionalidad. Tanto es así que, al enfrentarse a este tipo de tablas, los alumnos de grados superiores suelen activar sus conocimientos sobre el tema sin analizar en profundidad la situación particular. Además, en muchas ocasiones, esta acción (casi automática) los lleva a obtener resultados inconsistentes cuando las magnitudes no guardan entre sí una relación proporcional, por ejemplo, en el siguiente caso.

Edad	Cantidad de dientes
1 año	8
4 años	32
16 años	128

Usar cálculos para resolver sencillos problemas de proporcionalidad directa

Problema 3

Escriban los cálculos que permiten averiguar cuántos alfajores trae esta oferta.



En la siguiente imagen vemos que este alumno de 2.° grado reconoce la suma reiterada de 4. Sin embargo, nos interesa detenernos en el registro que realiza. El 8 resulta de sumar 4 + 4. El 12 que escribe debajo surge de la suma de 8 + 4. Finalmente, obtiene el 16 a partir de sumar 12 + 4. Hasta allí ha sumado el contenido de 4 cajas de alfajores. Coloca la raya y debajo el 20, al que llega luego de agregar 4 al 16 y no de sumar 8 + 12 + 16, como puede leerse en el formato de la cuenta. El niño ha realizado sumas de 4 en 4 para obtener el resultado total de alfajores de las 5 cajas y ha ido registrando los resultados parciales que fue obteniendo. Este procedimiento puede ponerse en relación con algunas de las estrategias utilizadas por alumnos de 3.er grado al resolver el problema que presentamos en el apartado que sigue.

Series para desplegar y analizar propiedades de la proporcionalidad

En estas tablas, se organiza la información referida a los precios de diferentes golosinas.

Problema 4

Completá las tablas de precios de cada golosina.

CANTIDAD DE CARAMELOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	2									

CANTIDAD DE MANZANAS	1	2	3	4		6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)		6			15					

CANTIDAD DE CHUPETINES	1	2	3		5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	4			16						

CANTIDAD DE BARRITAS DE CEREAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	6									

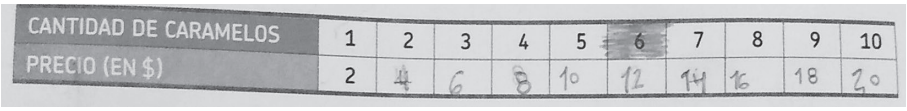
CANTIDAD DE CHOCOLATINES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	8									

Una vez que los alumnos completen los precios, podrán establecerse vínculos entre diferentes valores de ambas magnitudes. En este sentido, este tipo de tablas se diferencian de las incluidas en los problemas 1 y 2, que representan solo un recorte de las relaciones posibles.

En una clase en la que alumnos de 3.er grado comenzaron por completar la primera tabla, se generó el siguiente diálogo.

Valentina: Yo sé qué hay que hacer. Hay que hacer de 2 en 2. Haciendo 2, 4, 6, 8 y así [4].
Docente: De 2 en 2 dice Valen, ¿todos piensan igual? Se ponen a trabajar y en un ratito hacemos una puesta en común y vemos.

En la tabla que sigue, los niños completaron sin dificultades usando, en la mayoría de los casos, la suma de 2 en 2 identificada por Valentina y que se vincula con el procedimiento de sumar de 4 en 4 utilizado por el alumno de 2.° grado que resuelve el problema 3 de la página anterior.



CANTIDAD DE CARAMELOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Como veremos más adelante, los alumnos logran vincular explícitamente este problema con la multiplicación; sin embargo, en un inicio, deciden sumar de 2 en 2. Ahora bien, mientras suman de 2 en 2 los valores de la fila de los precios, en la fila de la cantidad de caramelos los valores aumentan de 1 en 1. Aunque esto es así en este caso, podría variar en otras ocasiones: por ejemplo, si se presentara la siguiente tabla, la estrategia de sumar sucesivamente 2 no funcionaría de igual modo a pesar de mantenerse constante el precio de cada caramelo.

Cantidad de caramelos	1	2	4	8	10	16	20
Precio (en $)	2						

En caso de utilizar la estrategia anterior, los alumnos deberían descartar aquellos resultados que corresponden a los valores no incluidos en la tabla.

Sumar de 2 en 2 resulta ser un recurso efectivo para completar la tabla del problema 4. Así formulada, esta estrategia parece no vincularse directamente con las

4. A pesar de tratarse de un registro oral y que correspondería transcribir usando palabras, hemos optado en este libro por escribir los números para facilitar la lectura.

propiedades de la proporcionalidad. Sin embargo, puede constituirse en punto de apoyo para avanzar en el tratamiento de las propiedades que permiten explicar su funcionamiento. Si bien no se espera que los niños establezcan tal relación, los docentes que acompañamos sus primeros acercamientos al estudio de la proporcionalidad nos vemos en la tarea de ir reconociendo el uso implícito que los alumnos hacen de sus propiedades al desplegar diversos procedimientos y representaciones, sean correctos o no. ¿Cuál es la propiedad que subyace a la forma de completar la tabla propuesta por estos niños? Una de las propiedades de la proporcionalidad permite obtener valores desconocidos a partir de sumar o restar los correspondientes a otros valores disponibles. Por ejemplo, para averiguar el precio de 5 caramelos es posible sumar los precios de 2 y 3 caramelos (4 + 6 = 10).

Cantidad de caramelos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio (en $)	2	4	6		10					

Al sumar de 2 en 2 cada valor de la tabla para obtener el siguiente, los niños estarían sumando a cada columna el valor correspondiente al precio de 1 caramelo, por ejemplo, para obtener el precio de 6 caramelos basta sumar al precio de 5 caramelos el valor de 1 caramelo más, es decir $ 2.

En las diferentes tablas del problema 4 presentado en la página 19, se vinculan dos magnitudes de diferente naturaleza: una apoyada en el campo de los números naturales (caramelos, manzanas, chupetines, barritas de cereal y chocolatines) y otra apoyada en una porción del campo de los números decimales (dinero). Una cuestión importante a señalar es que, si bien el dinero admite números naturales y decimales, la decisión de elegir números naturales para el precio de la unidad evita la presencia de números racionales al completar la tabla. Sin embargo, uno de los niños propone un procedimiento de resolución que nos lleva a pensar en la posibilidad de su irrupción en escena, al menos implícitamente. Compartimos a continuación el episodio al que hacemos referencia.

Santino, uno de los alumnos del grupo de 3.°, realizó sumas sucesivas para completar casi todas las tablas; pero recurrió a la resta para completar esta.

CANTIDAD DE CHOCOLATINES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

Durante la puesta en común, posterior a la resolución del problema, se produjo el intercambio que transcribimos en la página que sigue.

Docente: Acá Santi tiene algo que decir. Lauti dijo que para completar la de chocolates hizo lo que venía haciendo, sumar de 8 en 8, pero a Santi se le ocurrió otra cosa. ¿Querés hacerlo en el pizarrón, Santi, y contarles a tus compañeros? (La maestra lo ayuda dibujando la tabla). Teníamos en la tabla que 1 chocolate salía 8, ¿no es cierto? Explicales cómo lo pensaste vos.
Santi: Le sumé 10 y le resté dos.
Docente: ¿Alguien más lo hizo como Santi? ¿Se entiende lo que hizo?
Martina: Porque 10 – 2 es 8.

Saber que 10 – 2 es 8 parece un conocimiento fértil para facilitar la suma de 8 en 8 que permite completar la tabla. Y funciona. Analicemos con más detalle la propuesta de Santino.

La propiedad que subyace a este procedimiento es la misma que funciona implícitamente al sumar de 2 en 2 el precio de los caramelos, o al sumar de 8 en 8 como hicieron sus compañeros. Como dice Martina intentando justificar el éxito obtenido por Santino, 10 – 2 es 8. ¿Pero qué es lo que se resta? ¿Qué representan el 10 y el 2? Resulta interesante detenernos en este procedimiento dado que en el contexto particular de los datos de este problema las columnas correspondientes a $ 10 y $ 2 no figuran en la tabla como para ser restadas entre sí, y no podrían incluirse ya que los chocolatines se venden enteros (1 chocolatín vale $ 8 y 2 chocolatines valen $ 16).

Ahora bien, si en lugar de tratarse de chocolatines la tabla se refiriera a cualquier producto que se venda por kilo, o bien se ubicara en un contexto estrictamente numérico, sería posible incluirlas como muestra la siguiente tabla.

Cantidad de orégano (en kilos)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2
Precio (en $)	2	4	6	8	10	12	14	16

Mientras que en la tabla de los chocolatines figuran solo los valores enteros, en el caso de la tabla del orégano[5] se abre la posibilidad de incluir valores intermedios (mostrando solo algunos de los infinitos posibles). A su vez, si se agregaran pesos intermedios, los precios en pesos comenzarían a expresarse en decimales, por ejemplo: el precio de 0,05 kilos es $ 0,40.

5. Somos conscientes del desfasaje entre el producto elegido (orégano) y el precio actual. Sostuvimos los mismos valores que en la tabla que completó Santino para que resulte más sencillo comparar el funcionamiento de su procedimiento en contextos de magnitudes discretas o continuas.

Debido a que en el capítulo 2 de este mismo libro se aborda la proporcionalidad con números racionales, aquí solo mencionamos el tema para explicitar que si bien Santino se apoya en el resultado de una resta conocida para facilitar (y evitar) la suma de 8 en 8, el procedimiento propuesto (sumar 10 y restar 2) funciona porque se funda en la propiedad distributiva de la multiplicación vinculada a una de las propiedades de la proporcionalidad. Santino sabe que sumar 8 equivale a sumar 10 y restar 2. En términos de la tabla referida a los precios del orégano, para averiguar el precio de 2 kilos se puede sumar el precio de 1 kilo ($ 8), o bien, sumar el valor de 1 $\frac{1}{4}$ kilo ($ 10) y restar el valor de $\frac{1}{4}$ kilo ($ 2).

Los niños continúan completando el resto de las tablas sumando de 3 en 3, de 4 en 4 y de 6 en 6. Ahora bien, identificar "de cuánto en cuánto" hay que sumar puede representar un problema. Tal es el caso de la segunda tabla, en la que se omite el precio de una manzana, es decir, el valor de la unidad.

CANTIDAD DE MANZANAS	1	2	3	4		6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)		6			15					

A propósito de lo cual se genera el siguiente intercambio entre los niños y la docente.

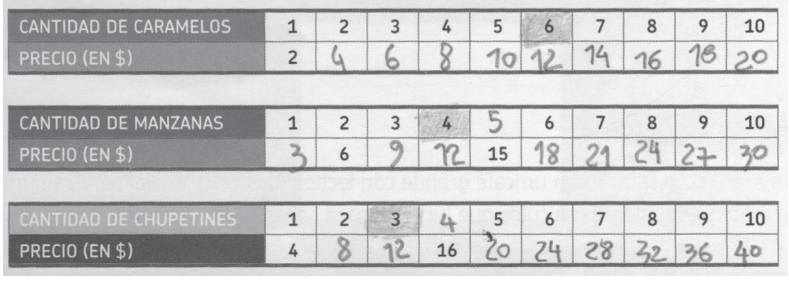
DOCENTE: Antes de continuar, vamos a leer todas las tablas de los precios. Miremos la segunda tabla. ¿Qué ven de diferente en esta tabla de las manzanas?
CELESTE: Es que, por ejemplo, una manzana no dice cuánto sale.
MARTINA: Yo ya sé, 3.
DOCENTE: A ver Martina, ¿qué miraste vos de la tabla para saber cuánto sale una manzana?
MARTINA: Yo pensé porque en el dos está el 6, entonces en el del 1 es 3, porque al 6 lo partí al medio.
MARIANO: Va de 3 en 3.
DOCENTE: Porque va de 3 en 3. Los compañeros dijeron que depende del precio de la unidad va a ir de 2 en 2 o de 3 en 3.

Sin llegar aún a definir la proporcionalidad directa y formular sus propiedades, los alumnos van identificando que el valor de la unidad cumple un rol importante en este tipo de problemas. Estos conocimientos que comienzan a circular en Primer ciclo se retoman y explicitan progresivamente en Segundo ciclo, en este caso, ligados a la constante de proporcionalidad. Una vez que los alumnos completan todas las tablas, se propone el problema que vemos en la página siguiente.

Problema 5

Charo, Jerónimo y Valentín tienen $ 12 cada uno. Charo compró caramelos; Jerónimo, chupetines; y Valentín, manzanas. ¿Cuántas cosas compró cada uno si gastaron todo el dinero que tenían?

Frente a este problema, algunos niños identifican rápidamente que el 12 se encuentra en las tres tablas a las que se refiere el problema.



CANTIDAD DE CARAMELOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

CANTIDAD DE MANZANAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

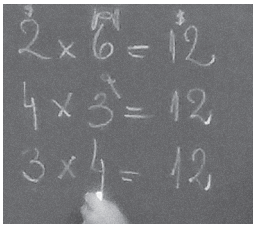
CANTIDAD DE CHUPETINES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PRECIO (EN $)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Al avanzar en el intercambio colectivo, la docente consulta a los niños sobre cómo dejar registro de lo que han identificado.

Docente: ¿Cómo puedo escribir?
Valentina: Usando el "por" (refiriéndose al signo de multiplicar). En caramelos, 2 por 6 es 12. Y la plata es 12. El 6 es de cantidad de caramelos.

La alumna reconoce claramente que se trata de multiplicar 2 x 6. También tiene claro qué representan los números en juego: el 12 es el dinero y el 6, la cantidad de caramelos. La docente retoma los aportes de la niña y agrega que el 2 es el precio de cada caramelo, cuestión que no había sido mencionada por la alumna.

Docente: Voy anotando. A ver, Valentina dice…, a ver si estamos todos de acuerdo. El 6 son los caramelos y el 2 es el precio que vale cada caramelo y el 12 es la plata que gastó. ¿Están todos de acuerdo con eso? Lo dejamos chiquitito para acordarnos que estos eran los caramelos, la plata y la plata.



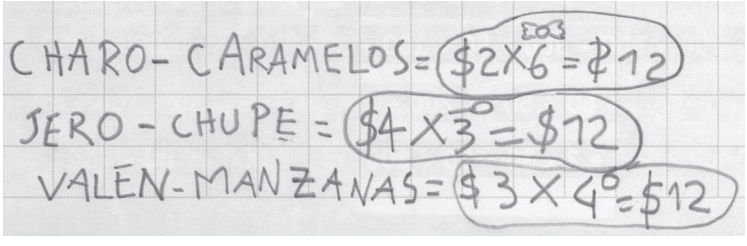
Como puede verse en la siguiente imagen del pizarrón, la maestra dibuja "chiquitito" un caramelo sobre el 6, y coloca el signo $ sobre el 12 y sobre el 2 para recordar qué representa cada número.

En los cálculos utilizados para resolver estos problemas, solo se registran tres de los cuatro valores en juego. El 1 no figura en el cálculo, ausencia que se refuerza al referirse a los "caramelos, la plata y la plata". Sin embargo, no es posible sostener la relación proporcional sin que se considere el valor de la unidad, al menos implícitamente. La docente repone la unidad cuando expresa: "El 2 es el precio de cada caramelo". Al multiplicar 2 x 6, se reitera 6 veces el precio unitario de los caramelos, se multiplica el 6 por la constante de proporcionalidad (valor de la unidad) y se obtiene 12.

A diferencia de lo que realizaron sus compañeros, Felipe considera que no es necesario registrar el cálculo y propone lo siguiente.

Felipe: Yo tengo otra forma. En vez de multiplicar, pongo "Charo compró…" y me fijo en la tabla, porque… ¿para qué multiplicar si ya lo tenemos en la tabla?
Docente: Claro, pero ahora lo estamos como pasando en limpio. Pero está bien, ya está en la tabla, me fijo ahí.
Felipe: Entonces, buscás en la tabla y listo, por ejemplo: Charo, 6 caramelos.

Si bien es cierto lo que propone Felipe, resulta interesante que registren el cálculo y aclaren qué representa cada uno de los números involucrados en función de hacer explícita la relación con la multiplicación, así como las magnitudes que intervienen. Es probable que Felipe tenga claro lo que está realizando, pero nos alerta sobre el riesgo de poner a circular una estrategia de búsqueda de valores en la tabla sin detenerse a analizar las cantidades y las magnitudes que se vinculan.



Compartimos a continuación el diálogo que se genera alrededor de los cálculos anteriores.

Docente: ¿Cuánto vale cada manzana?
Amelia: 3.
Laura: 3 x 4, 12.
Gabriel: Es lo mismo que hacer 4 x 3 [cálculo correspondiente a los chupetines].
Docente: Ay, miren lo que dijo el compañero: que es lo mismo 3 x 4 y 4 x 3.
Gabriel: Porque te va a dar el mismo resultado. Es lo mismo, pero al revés.
Docente: Esto lo habíamos visto, ¿no? Y aparecen en la tabla pitagórica, esto de que el lugar invertido en la multiplicación de números iguales… ¿qué pasa?
Laura: Da el mismo resultado. Pero también habíamos visto que números que no son los mismos podían dar el mismo resultado. O sea, 2 x 6 da 12 y 4 x 3 no es el mismo número y da 12.
Docente: Exactamente, podemos encontrar diferentes multiplicaciones que den el mismo resultado.
Gabriel: Por ejemplo 6 x 5 es igual a 30 y 3 por 10 es igual a 30.
Docente: Esto estaría bueno que lo podamos anotar como una conclusión, ¿no? Para sumarla acá [se refiere a un cartel iniciado en clases anteriores]. ¿Cómo lo podemos registrar a eso?
Gabriel: 4 x 4 es igual a 16 y 2 x 8 es igual a 16.
Santi: Por ejemplo, 4 x 3 o 3 x 4 van a dar el mismo número no importa en qué lado esté.

Los números involucrados en este problema habilitan el establecimiento de ciertas relaciones que se apoyan en las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación aunque aún no se las denomine de esa manera (3 x 4 = 4 x 3 = 2 x 6). La docente interviene evocando el trabajo realizado en torno a la tabla pitagórica que, dada la particular organización de los factores y productos que allí se incluyen, favorece la exploración de tales relaciones y regularidades numéricas. Este trabajo se extiende y profundiza en Segundo ciclo explicitando las propiedades que las fundamentan.

En síntesis, hasta aquí nos referimos a algunas de estas propiedades:

- A la suma de dos valores de una de las magnitudes le corresponde la suma de los valores correspondientes a cada uno de la otra magnitud.
- Si se multiplica cada uno de los valores de una magnitud por un mismo número, que es el valor correspondiente a 1, se obtienen los valores de la otra magnitud. Ese número se llama “constante de proporcionalidad”.

"Nuevas" propiedades de la proporcionalidad

A partir del siguiente problema, nos detendremos en otra de las propiedades de la proporcionalidad.

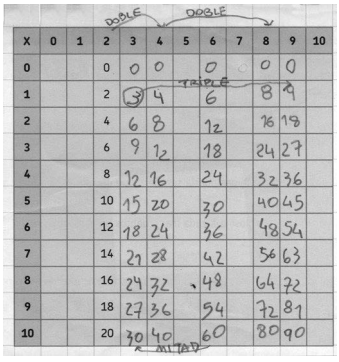
Problema 6

a) ¿Es cierto que, si averiguan el doble de los productos de la tabla del 2, obtienen todos los productos correspondientes a la tabla del 4? Intenten completar las tablas del 4 y del 8 usando la tabla del 2.

b) Si multiplican por 3 los productos de la tabla del 2, ¿los productos de qué tabla de multiplicar obtienen?

c) Completen la tabla del 3 usando la del 6 y la del 9 usando la del 3.

Si bien el problema 6 puede resolverse sin utilizar la tabla pitagórica, en este caso los alumnos de 3.° disponían de un cuadro que presentaba los productos de la tabla del 2. Cada una de las consignas planteadas en este problema apunta a explorar relaciones multiplicativas entre productos que se apoyan en la propiedad asociativa de la multiplicación y la división. A partir de estas propiedades, es posible afirmar que, por ejemplo, 15 x 8 = 15 x 4 x 2, o bien, que 81 : 9 = 81 : 3 : 3 sin necesidad de resolverlos. Como puede leerse en la siguiente imagen, los niños exploran e identifican relaciones de dobles, triples y mitades.



X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0			0	0	0		0		0	0	
1			2	3	4		6		8	9	
2			4	6	8		12		16	18	
3			6	9	12		18		24	27	
4			8	12	16		24		32	36	
5			10	15	20		30		40	45	
6			12	18	24		36		48	54	
7			14	21	28		42		56	63	
8			16	24	32		48		64	72	
9			18	27	36		54		72	81	
10			20	30	40		60		80	90	

Estas relaciones se vinculan con una de las propiedades de la proporcionalidad que no hemos mencionado hasta el momento:

- Si se duplica, triplica, cuadruplica, etc. una magnitud, se duplica, triplica o cuadruplica la otra. Lo mismo sucede si se calcula la mitad, el tercio, etc. de esas magnitudes.

Esta forma de completar la tabla pitagórica promueve el reconocimiento de múltiples relaciones que se apoyan en distintas descomposiciones multiplicativas y ofrece una alternativa a la vía clásica de obtener los productos a partir de multiplicar cada factor por la constante de proporcionalidad (5 x 1 = 5, 5 x 2 = 10, 5 x 3 = 15, etc.).

Problemas de producto de medidas

En los problemas de proporcionalidad directa recién analizados hay cuatro números en juego (aunque el 1 correspondiente al valor de la unidad a veces pase desapercibido como uno de los cuatro números) y dos magnitudes diferentes. Analizaremos ahora otro tipo de problemas denominados por Vergnaud (1981) como "producto de medidas". Estos incluyen, entre otros, a los problemas de combinatoria y a los de organizaciones rectangulares. Por ejemplo, al combinar 3 remeras y 4 pantalones armando conjuntos de ropa con 1 remera y 1 pantalón, se pueden obtener 3 x 4 = 12 conjuntos. La magnitud "remeras" se combina con la magnitud "pantalones" obteniendo ahora una nueva magnitud: "conjuntos". Lo mismo sucede cuando se multiplica "cuadraditos por fila" × "cuadraditos por columna" y se obtienen "cuadraditos". En ellos, se establece una relación ternaria: surge una magnitud que resulta de multiplicar otras dos.

Los alumnos de Primer ciclo pueden resolver problemas sencillos, como los mencionados, que involucran determinar la cantidad de elementos de una nueva colección al combinar elementos de otras colecciones. En este ciclo, ese tipo de problemas se distinguirán de los de series proporcionales ya analizados anteriormente.

Sin embargo, esta distinción entre dos tipos de problemas multiplicativos (series proporcionales y producto de medidas) deberá ser revisada en Segundo ciclo a partir de profundizar en nuevos aspectos.

En los problemas de producto de medidas, esta nueva magnitud derivada de las otras dos guarda una relación de proporcionalidad con cada magnitud de las originales, lo que da lugar a una relación de doble proporcionalidad: si se duplica la cantidad de remeras 3 x 2 , se duplicará la cantidad de conjuntos que se pueda armar, cantidad que podemos representar con el cálculo 3 x 2 x 4 (manteniendo entre sí una relación de proporcionalidad directa). Si se duplica la cantidad de pantalones, también se duplicará la cantidad de conjuntos (manteniendo nuevamente otra relación de proporcionalidad directa). Pero si se duplican ambas magnitudes simultáneamente, el producto resultante para la nueva magnitud será el cuádruple (3 x 2 x 4 x 2 = 12 x 4 = 48 o bien 3 x 2 remeras x 4 x 2 pantalones = 6 remeras x 8 pantalones = 48 conjuntos). Sin duda este aspecto es más complejo y por ello se propone para ser explorado en Segundo ciclo de la escuela primaria.

Estas relaciones se ponen en juego en un problema como el de la página siguiente, en donde los alumnos deben validar ciertas afirmaciones acerca de esta "doble" proporcionalidad.

PROBLEMA 7

Bernardo hace banquetas para vender. Para la parte del asiento usa cedro, algarrobo, pino o álamo. Para las patas usa hierro o acero inoxidable.

a) ¿Será cierto que si duplica la cantidad de tipos de madera se duplica la cantidad de modelos que puede armar?

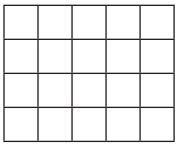
b) ¿Será cierto que si duplica a la vez la cantidad de tipos de madera y la cantidad de materiales para las patas, se duplica la cantidad de modelos de banquetas?

Como ya fue mencionado, aquí es necesario considerar que, al duplicar la cantidad de maderas y sin variar los materiales que usa para las patas, se duplican los modelos de banqueta posibles (8 x 2 = 16). Lo mismo sucedería si, a la inversa, se duplicaran los materiales que se usan para las patas y se mantuvieran los tipos de maderas de la situación original. Ahora bien, al duplicar las dos magnitudes el producto de ambas no se duplica, sino que se cuadruplica (2 x 4 x 2 x 2 = 8 x 4 = 32).

Un análisis semejante puede realizarse en torno al siguiente problema.

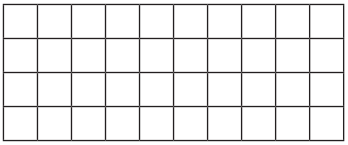
PROBLEMA 8

Se colocaron 4 filas con 5 venecitas en cada fila.

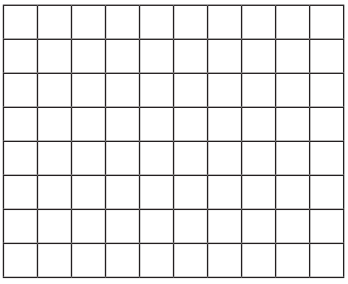


¿Es cierto que si se duplica la cantidad de venecitas por fila, se duplica la cantidad total de venecitas? ¿Será cierto que si se duplica a la vez la cantidad de filas y la cantidad de venecitas por fila, se duplica la cantidad total de venecitas?

La cantidad total de venecitas es proporcional a cada una de las cantidades en juego (filas y venecitas por fila) dando lugar a una relación de doble proporcionalidad. Si se duplica la cantidad de venecitas por fila, se duplica la cantidad total de venecitas (4 x 10 = 40), como puede verse en la imagen de la página siguiente.



En cambio, si se duplican a la vez ambas cantidades, se cuadruplica la cantidad total de venecitas (2 x 4 x 2 x 5 = 8 x 10 = 80).



A lo largo de estas páginas hemos intentado dar cuenta de la diversidad de problemas multiplicativos vinculados con el estudio de la proporcionalidad que pueden incluirse en las propuestas de enseñanza desde Primer ciclo. A su vez, a través de los procedimientos infantiles e intercambios producidos en las aulas, intentamos recuperar algunas de las preguntas que se formulan y de las respuestas que van ensayando al enfrentarse a nuevos desafíos.

Los primeros problemas presentados en este capítulo son situaciones multiplicativas que pueden resolverse contando, sumando o multiplicando y no exigen el reconocimiento de las propiedades de la proporcionalidad directa. Aquellos problemas con series proporcionales ya buscan empezar a explicitar dichas propiedades a partir de su uso inicial más intuitivo y exploratorio. Finalmente, hemos presentado algunos problemas más complejos que implican un retorno a la noción de proporcionalidad, luego de haber estudiado sus propiedades, pero en una nueva clase de problemas.

Parece necesario, entonces, asumir un recorrido a largo plazo que involucra, desde la enseñanza, aceptar el carácter implícito y provisorio de los conocimientos de los alumnos y provocar las condiciones didácticas para favorecer el avance progresivo de las conceptualizaciones que se van produciendo. La enseñanza de la proporcionalidad es justamente uno de esos conceptos que requerirán variadas y numerosas oportunidades de ampliación. Los capítulos siguientes abonarán a tal recorrido.